2B Devoir de mathématiques II,1 5.02.10

Question 1 — 10 (=5+5) points

(1) Montrer que si une fonction f est dérivable en un réel a du domaine de définition, alors f est continue en a.

(2) Déterminer la fonction dérivée de la fonction $f : x \mapsto 1 \,/\, x^5$ en utilisant la définition de la dérivée.

Question 2 — 19 (=3+3+3+4+6) points

Déterminer les domaines de définition et de dérivabilité des fonctions suivantes. Calculer et ***factoriser*** leur dérivée :

(1) $f\left(x\right) = 2x^4 \cdot \sqrt{x} - 7$

(2) $g\left(x\right) = \dfrac{3}{4x \cdot \sqrt[3]{x^2}}$

(3) $h\left(x\right) = \left(1 + \cos^4 x\right)^6$

(4) $k\left(x\right) = \dfrac{2x-5}{x^2-4}$

(5) $m\left(x\right) = \dfrac{\sqrt{x}}{\left(2x-1\right)^2}$

Remarque : Pour la fonction m on demande d'étudier en détail la dérivabilité en 0 et d'interpréter graphiquement le résultat.

Question 3 — 5 points

Déterminer une équation cartésienne de la tangente au graphe de la fonction $p : x \mapsto \dfrac{3}{x} - \dfrac{1}{x^2}$ au point d'abscisse 1.

Question 4 — 15 (1+2+7+3+2) points

Soit la fonction f définie par :

$$f : x \mapsto \frac{2x}{1-\left|x\right|}.$$

(1) Quels sont les domaines de définition et de continuité de f ?

(2) Ecrire $f\left(x\right)$ sans valeur absolue.

(3) Déterminer la fonction dérivée de f et préciser son domaine. (On demande une étude détaillée de la dérivabilité en 0.)

(4) Etudier le comportement de f en 1 et en -1.

(5) Esquisser le graphe de f au voisinage des points d'abscisses 0, 1 et -1.

Question 5 — 11 (=8+3) points

Soit a et b deux réels et g la fonction définie par :

$$g : x \mapsto \begin{cases} a & \text{si } x \leq 1 \\ x + \dfrac{b}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

(1) Déterminer les constantes a et b telles que g soit dérivable en 1 (avec justifications détaillées).

(2) Avec les valeurs de a et de b obtenues :

a) Préciser les domaines de continuité et de dérivabilité de g.

b) Esquisser le graphe de g au voisinage du point d'abscisse 1.

G. Lorang