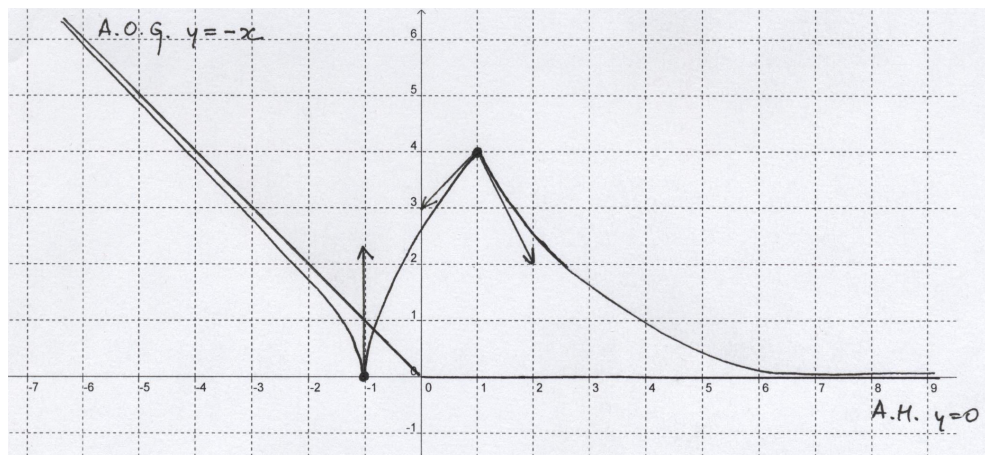


Question 1

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$f'(x)$	- $-\infty$	\parallel	$+\infty$ + 1	\parallel	-2 -
$f''(x)$	-	\parallel	-	\parallel	+
$f(x)$	$+\infty$ A.O.G: $y = -x$	0 (m)		4 (M)	0
\mathcal{G}_f		Point de rebroussement		Point anguleux	



Question 2

(1) $\text{dom } f = \text{dom}_c f = \text{dom } f' = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

(2) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$, donc A.H.: $y = 0$.

$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \frac{-24}{+\infty} = -\infty$, donc A.V.: $x = -2$.

(3) $(\forall x \in \text{dom } f')$

$$f'(x) = \frac{12(x+2)^2 - 12x \cdot 2(x+2)}{(x+2)^4} = \frac{12(x+2-2x)}{(x+2)^3} = \frac{12(2-x)}{(x+2)^3}$$

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$.
- Le signe de $f'(x)$ est celui de $(2-x)(x+2)$.

x	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	\parallel	$+$	0	$-$
$f(x)$	$0 \rightarrow -\infty$	\parallel	$-\infty \rightarrow$	$\frac{3}{2}$ (M)	$\rightarrow \bigcirc$

(4) $\text{dom } f'' = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= \frac{12(-1)(x+2)^3 - 12(2-x)3(x+2)^2}{(x+2)^6} = \frac{-12(x+2+6-3x)}{(x+2)^4} \\
 &= \frac{-12(x+2)-36(2-x)}{(x+2)^4} = \frac{24(x-4)}{(x+2)^4}
 \end{aligned}$$

- $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4$.
- Le signe de $f''(x)$ est celui de $x - 4$.

x	$-\infty$	-2		4	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	\parallel	$-$	0	$+$
\mathcal{G}_f	\downarrow	\parallel	\downarrow	P.I	\uparrow

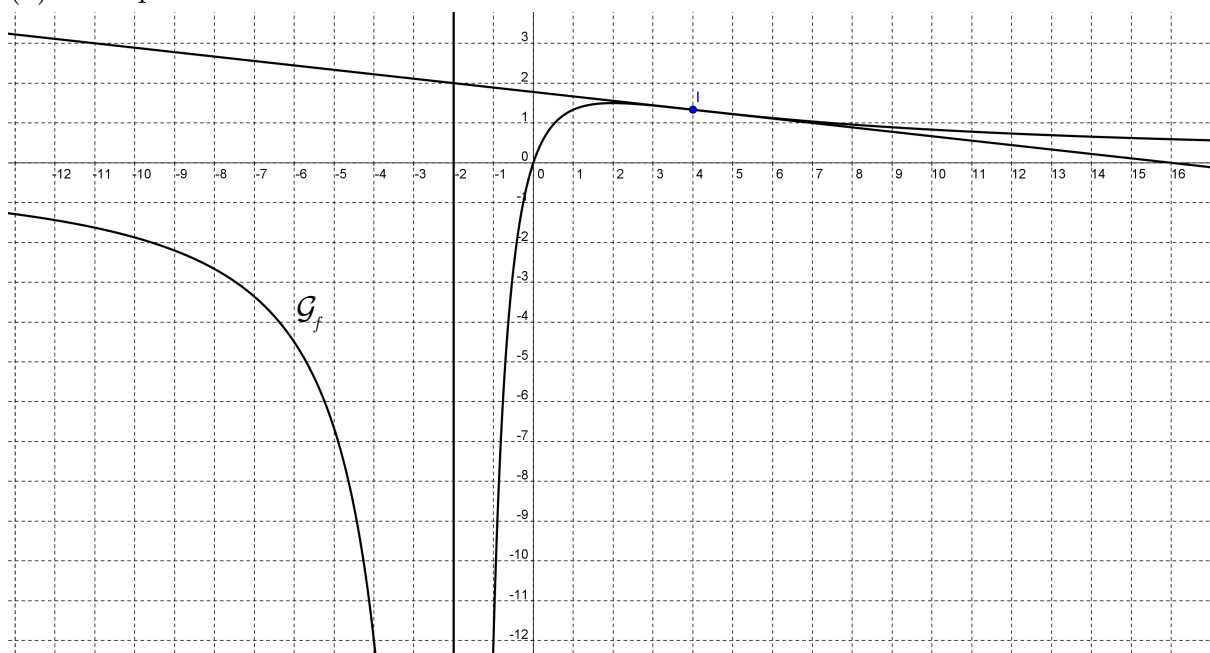
Point d'inflexion : $I(4, \frac{4}{3})$.

(5) $t_4 : y = f'(4)(x-4) + f(4)$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{9}(x-4) + \frac{4}{3}$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{9}x + \frac{16}{9}$$

(6) Graphe :



Question 3

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(3x)}{\sin^2(2x)} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin(3x)}{4 \sin(2x) \underbrace{\cos(2x)}_{\rightarrow 1}} = \frac{3}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(2x)} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \frac{3}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cos(3x)}{2 \cos(2x)} = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{8}$$

Question 4

Voir cahier !

Question 5

(1) h est une fonction impaire, puisque :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) h(-x) = \frac{(-x)^3}{1 + (-x)^2} = -\frac{x^3}{1 + x^2} = -h(x)$$

(2) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [h(x) - x] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{1 + x^2} - \frac{x + x^3}{1 + x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x}{1 + x^2} = 0$. On en déduit que \mathcal{G}_h admet l'asymptote oblique : $y = x$.

(3) $\text{dom } h' = \text{dom } h = \mathbb{R}$.

$$h'(x) = \frac{3x^2(1 + x^2) - x^3 \cdot 2x}{(1 + x^2)^2} = \frac{3x^2 + x^4}{(1 + x^2)^2} = \frac{x^2(x^2 + 3)}{(1 + x^2)^2}$$

On remarque que $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ et $h'(x) > 0$ sinon. Il en résulte que l'origine $(0, 0)$ est un point d'inflexion à tangente horizontale de \mathcal{G}_h .

(4) $\text{dom } h'' = \mathbb{R}$.

$$h''(x) = \frac{(6x + 4x^3) \cdot (1 + x^2)^2 - 2(x^4 + 3x^2)(1 + x^2) \cdot 2x}{(1 + x^2)^4} \left| \begin{array}{l} = \frac{2x[3 + 5x^2 + 2x^4 - 2x^4 - 6x^2]}{(1 + x^2)^3} \\ = \frac{2x[(3 + 2x^2)(1 + x^2) - 2(x^4 + 3x^2)]}{(1 + x^2)^3} \end{array} \right| = \frac{2x(3 - x^2)}{(1 + x^2)^3}$$

$$h''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \pm\sqrt{3}$$

Les racines de h'' sont des racines simples. h'' change de signe en chacune des racines. Par conséquent, \mathcal{G}_h admet trois points d'inflexion :

$$I_1\left(-\sqrt{3}, \frac{-3\sqrt{3}}{4}\right), I_2\left(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right) \text{ et l'origine } O(0, 0) \text{ qui est un point d'inflexion à}$$

tangente horizontale, comme nous l'avons déjà dit.

G. Lorang