Question 1

(1) Soit $f : x \mapsto ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ le polynôme cherché. Il faut déterminer 5 coefficients inconnus a, b, c, d, et e. Les conditions données se traduisent par :

a) $f(-2) = 0$, $f'(-2) = 0$ et $(\forall x \in \mathbb{R})\ \ f(x) \geq 0$

b) $f(2) = 3$, $f'(2) = 0$, $f''(2) = 0$ et f'' change de signe en 2.

On résout donc à l'aide de la V200 le système des 5 conditions nécessaires suivantes :

$$\begin{cases} f(-2) = 0 \\ f'(-2) = 0 \\ f(2) = 3 \\ f'(2) = 0 \\ f''(2) = 0 \end{cases}$$

La V200 donne un polynôme unique solution :

$$f(x) = \frac{9}{256}x^4 - \frac{3}{32}x^3 - \frac{9}{32}x^2 + \frac{9}{8}x + \frac{33}{16}$$

Il reste à vérifier que :

- $(\forall x \in \mathbb{R})\ \ f(x) \geq 0$ et
- f'' change de signe en 2

Or, à l'aide de la V200, on factorise $f(x)$:

$$f(x) = \frac{3(x+2)^2(3x^2 - 20x + 44)}{256}$$

Le facteur $(x+2)^2$ est toujours ≥ 0. Il en est de même pour $3x^2 - 20x + 44$ car le discriminant de ce trinôme est $\Delta = 400 - 4 \cdot 3 \cdot 44 = -128 < 0$. Donc on a bien : $(\forall x \in \mathbb{R})\ \ f(x) \geq 0$.

La V200 nous donne également la factorisation de $f''(x)$:

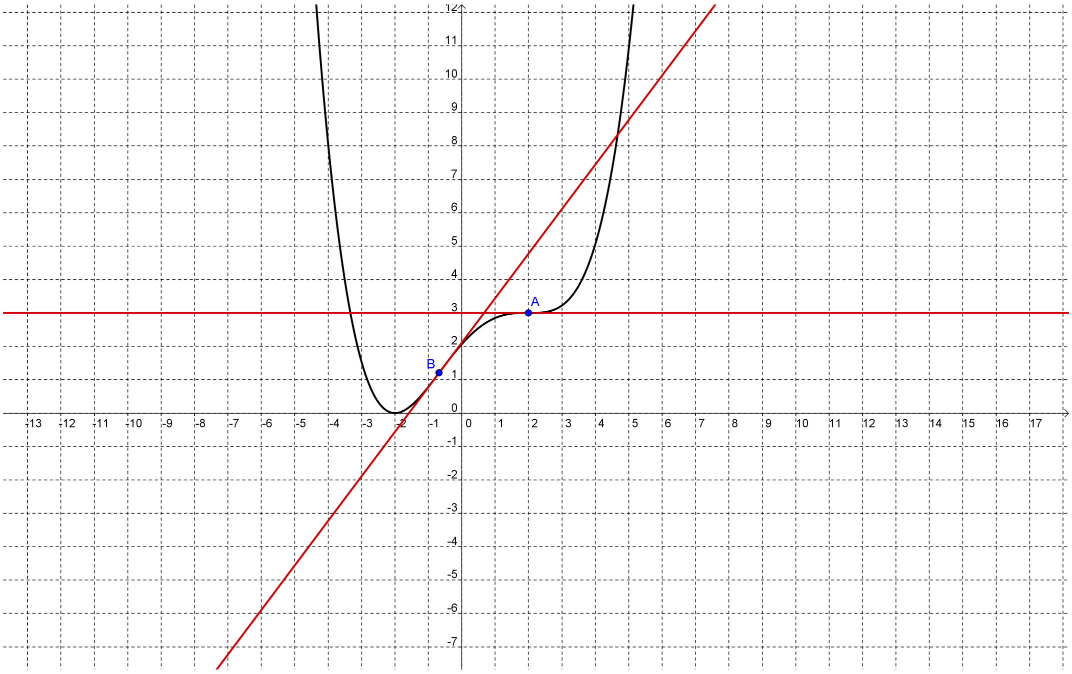
$$f''(x) = \frac{27x^2}{64} - \frac{9x}{16} - \frac{9}{16} = \frac{9(x-2)(3x+2)}{64}$$

Sur cette expression on voit que 2 est une racine simple de $f''(x)$ et que par suite $f''(x)$ change de signe en 2. Ainsi, le problème admet bien le polynôme trouvé f comme une solution unique.

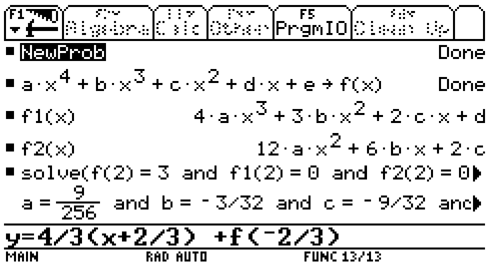
(2) f'' admet une deuxième racine simple, à savoir : $x = -\frac{2}{3}$. Il en résulte que $\mathcal{G}_f$ admet un deuxième point d'inflexion $B\left(-\frac{2}{3}, \frac{11}{9}\right)$. Equations des tangentes aux points d'inflexion :

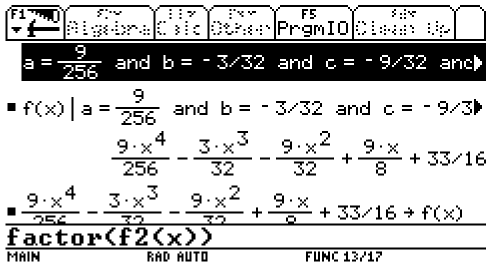
En A : $t_2 : y = 3$ En B : $t_{-\frac{2}{3}} : y = \dfrac{4}{3}x + \dfrac{19}{9}$

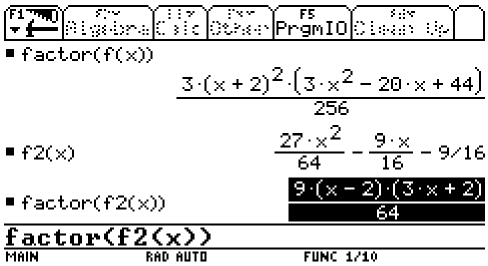
Représentation graphique :

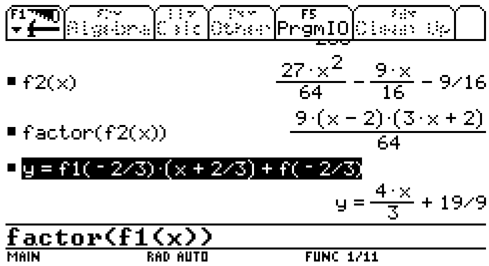


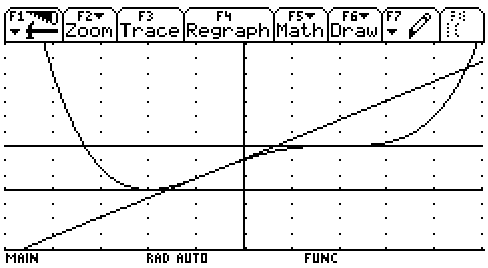
Photos d'écran :











Question 2

Soit x la longueur du 1^{er} morceau de ficelle et $1-x$ est celle du 2^e morceau (en m).

Le carré a donc comme côté $\frac{x}{4}$ et le triangle équilatéral $\frac{1-x}{3}$, avec $0 \le x \le 1$.

Or, la hauteur d'un triangle équilatéral de côté a est :

$$h = \sin 60° \cdot a = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

L'aire d'un tel triangle équilatéral est donc $\frac{\sqrt{3}}{4} a^2$.

Donc la somme des aires du carré et du triangle équilatéral vaut :

$$s(x) = \frac{x^2}{16} + \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1-x}{3}\right)^2$$

On développe cette expression avec la V200 et on trouve :

$$s(x) = \left(\frac{\sqrt{3}}{36} + \frac{1}{16}\right)x^2 - \frac{\sqrt{3}}{18}x + \frac{\sqrt{3}}{36}, \text{ avec } 0 \le x \le 1$$

$s(x)$ est un trinôme du second degré avec un coefficient de x^2 positif. Par conséquent, le graphe de s sur $[0,1]$ est un arc de parabole tourné vers le haut. On en déduit que s atteint son ***minimum*** en :

$$-\frac{b}{2a} = \frac{12\sqrt{3}-16}{11} \cong 0,435 \in [0,1]$$

Donc la somme des aires est ***minimale*** si $x = x_0 = \frac{12\sqrt{3}-16}{11}$. Le ***minimum*** est :

$$s(x_0) = \frac{3\sqrt{3}-4}{44} \simeq 0,02718 \text{ m}^2$$

Le côté du carré mesure alors $\frac{3\sqrt{3}-4}{11} \simeq 0,109 \text{ m} = 10,9 \text{ cm}$.

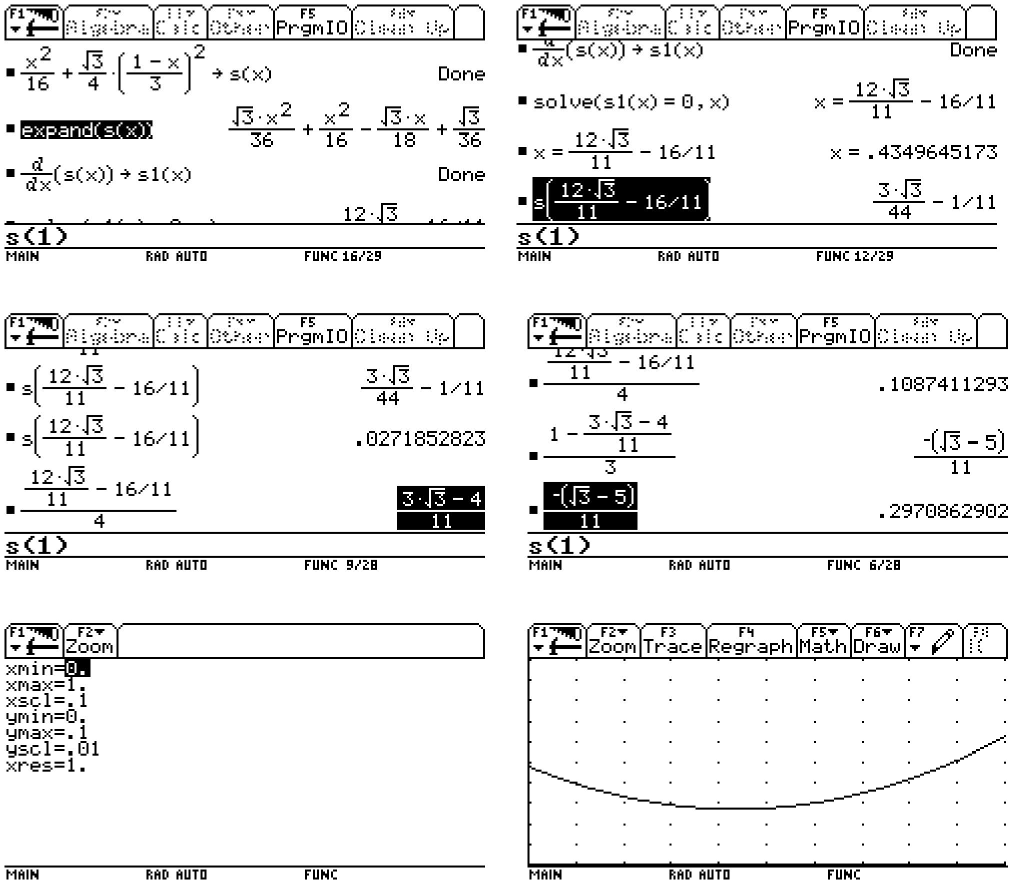
Le côté du triangle équilatéral mesure : $\frac{9-4\sqrt{3}}{11} \simeq 0,188 \text{ m} = 18,8 \text{ cm}$.

Compte tenu du sens de variation de s, il est clair que s atteint son maximum en l'une des deux extrémités du domaine d'étude $[0,1]$. Or, puisque

$$s(0) = \frac{\sqrt{3}}{36} \simeq 0,048 \text{ et } s(1) = \frac{1}{16} = 0,0625,$$

on conclut que l'aire ***maximale*** de 0,0625 m^2 est obtenue si on ***ne coupe pas*** la ficelle et si on en fait un carré. En d'autres termes : le côté du carré doit être $\frac{1}{4}$ et celui du triangle 0.

Photos d'écran :



Question 3

(1) Equation du demi-cercle ***supérieur*** de diamètre $[AB]$:

$$y = \sqrt{9 - x^2} = f(x)$$

Equation du demi-cercle ***inférieur*** de diamètre $[CD]$:

$$y = -\sqrt{1 - (x-6)^2} = -\sqrt{-x^2 + 12x - 35} = g(x)$$

(2) Soit $h : x \mapsto ax + b$ la fonction affine dont le graphe est *t*. On note $I(x_1, y_1)$ et $J(x_2, y_2)$ les points de contact entre les poulies et *t*. On résout à l'aide de la V200 le système de 4 équations à 4 inconnues (conditions nécessaires et suffisantes) :

$$\begin{cases} f(x_1) = h(x_1) \\ f'(x_1) = a \\ g(x_2) = h(x_2) \\ g'(x_2) = a \end{cases}$$

et on trouve la solution unique :

$$x_1 = 2\,,\ x_2 = 5{,}333333... = \tfrac{16}{3}$$

$$a=\frac{x_2-6}{\sqrt{-{x_2}^2+12x_2-35}}\ \text{ et }\ b=\frac{35-6x_2}{\sqrt{-{x_2}^2+12x_2-35}}$$

La V200 ne sait pas résoudre le système de façon exacte ! Bizarrement, elle ne remplace pas x_2 par 5,333…, probablement parce qu'il s'agit d'une valeur approchée. Si on remplace x_2 par $\frac{16}{3}$ on trouve :

$$a=-\frac{2\sqrt{5}}{5}\ \text{ et }\ b=\frac{9\sqrt{5}}{5}$$

D'où l'équation de la tangente commune t :

$$y=-\frac{2\sqrt{5}}{5}x+\frac{9\sqrt{5}}{5}$$

Les coordonnées exactes de I et J sont :

$$I\left(x_1,f\left(x_1\right)\right)=I\left(2,\sqrt{5}\right)\ \text{ et }\ J\left(x_2,g\left(x_2\right)\right)=J\left(\tfrac{16}{3},-\tfrac{\sqrt{5}}{3}\right)$$

(3) $\cos\widehat{BOI}=\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow\widehat{BOI}\simeq 0,8410686706$ rad

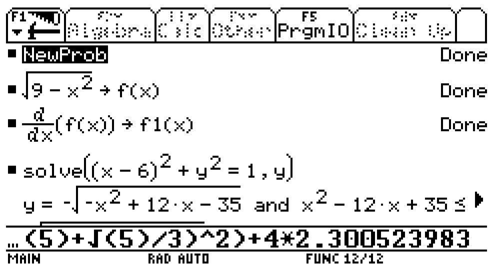
Donc : $\alpha=\widehat{AOI}=\pi-\widehat{BOI}\simeq 2,300523983$ rad .

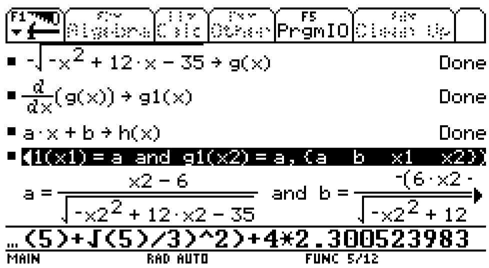
Remarquons que $\left(OI\right)\parallel\left(PJ\right)$ puisque la tangente t est perpendiculaire aux rayons $\left[OI\right]$ et $\left[PJ\right]$. Par conséquent $\widehat{DPJ}=\widehat{AOI}$. Comme le rayon de la poulie $\mathcal{P}_1$ est 3 fois plus long que celui de la poulie $\mathcal{P}_2$, la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AOI}$ est aussi le triple de celle de $\overset{\frown}{DPJ}$.

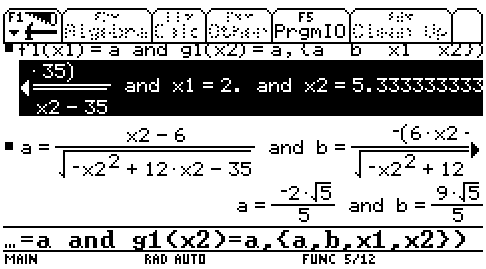
Finalement,

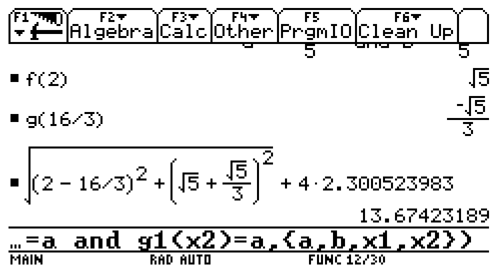
$$l=4\alpha+IJ=4\alpha+\sqrt{\left(2-\tfrac{16}{3}\right)^2+\left(\sqrt{5}+\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2}\simeq 13,67$$

Photos d'écran :









G. Lorang