

Question 1

27 (=1+4+7+9+2+4) points

Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{\sin x}{2 + \cos x}$

- (1) Déterminer $\text{dom } f$, $\text{dom}_c f$, $\text{dom}_d f$, $\text{dom } f''$.
- (2) Etudier la parité et la périodicité de f et en déduire qu'il suffit d'étudier f sur l'intervalle $D = [0, \pi]$.
- (3) Calculer $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de g sur D .
- (4) Calculer $f''(x)$ et en déduire la concavité et les points d'inflexion de \mathcal{G}_g sur D .
- (5) Déterminer une équation cartésienne des tangentes s et t à \mathcal{G}_f aux points d'abscisses 0 et π respectivement.
- (6) Représenter graphiquement f et les tangentes s et t dans un repère orthogonal bien choisi (sur un intervalle de longueur égale à 2 périodes au moins).

Question 2

19 (=4+1+2+10+2) points

On considère la fonction $g : x \mapsto \text{Arcsin} \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right)$.

- (1) Déterminer les domaines d'existence et de continuité g .
- (2) Etudier la parité de g .
- (3) Etudier les limites de g aux bornes du domaine et en déduire le comportement asymptotique de g .
- (4) Calculer $g'(x)$ pour $x \neq 0$ et ***simplifier cette expression autant que possible***. Etudier ensuite la dérivabilité de g en 0. Quelle est la nature du point d'abscisse 0 de \mathcal{G}_g ? Dresser le tableau de variation de g .
- (5) Représenter graphiquement g dans un repère orthogonal bien choisi.

Question 3

14 (=6+8) points

- (1) Définir la fonction Arctan et établir l'expression analytique de sa dérivée.
- (2) Justifier que la fonction $h : x \mapsto 2 \text{Arctan} \left(1 - \sqrt{x} \right)$ définit une bijection de \mathbb{R}_+ dans un intervalle I à déterminer. Déterminer h^{-1} et son sens de variation.

Formules trigonométriques

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$		
$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x}$	$\sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
$\sin(\pi - x) = \sin x$	$\sin(\pi + x) = -\sin x$	$\sin(-x) = -\sin x$
$\cos(\pi - x) = -\cos x$	$\cos(\pi + x) = -\cos x$	$\cos(-x) = \cos x$
$\tan(\pi - x) = -\tan x$	$\tan(\pi + x) = \tan x$	$\tan(-x) = -\tan x$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$	
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$	
$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cot x$	
$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$		$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$
$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$		
$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$		$\tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$
$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$		
$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$	$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$	
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$	$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$	
$\sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}$	$\cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$	$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$
$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$	$\cos 3x = -3 \cos x + 4 \cos^3 x$	
$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$		$\tan p + \tan q = \frac{\sin(p+q)}{\cos p \cos q}$
$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$		
$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$		$\tan p - \tan q = \frac{\sin(p-q)}{\cos p \cos q}$
$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$		
$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$		
$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$		
$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$		