Nom : .... Prénom : ....

2B Devoir de mathématiques III,2 2.07.2010

Question 1

(1) $\operatorname{dom} f = \operatorname{dom}_c f = \operatorname{dom}_d f = \operatorname{dom} f'' = \mathbb{R}$, puisque f est le quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur $\cos x + 2$ ne s'annule jamais.

(2) f est impaire et périodique de période 2π. En effet :

- $f\left(-x\right) = \dfrac{\sin\left(-x\right)}{2+\cos\left(-x\right)} = -\dfrac{\sin x}{2+\cos x} = -f\left(x\right)$
- $f\left(x+2\pi\right) = f\left(-x\right) = \dfrac{\sin\left(x+2\pi\right)}{2+\cos\left(x+2\pi\right)} = \dfrac{\sin x}{2+\cos x} = f\left(x\right)$

Il suffit donc d'étudier f sur l'intervalle $D = \left[0,\pi\right]$.

(3) $\left(\forall x \in \mathbb{R}\right)$

$$f'\left(x\right) = \frac{\cos x\left(2+\cos x\right) + \sin x \cdot \sin x}{\left(2+\cos x\right)^2}$$
$$= \frac{2\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{\left(\cos x + 2\right)^2}$$
$$\frac{2\cos x + 1}{\left(\cos x + 2\right)^2}$$

Sur D : $f'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3}$

x	0	$\dfrac{2\pi}{3}$	π
$f'\left(x\right)$	$+$	0	$-$
$f\left(x\right)$	0 $\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$ (M)	$\searrow$ 0

(4) $\left(\forall x \in \mathbb{R}\right)$

$$f''\left(x\right) = -2\sin x\left(\cos x + 2\right)^{-2} + \left(2\cos x + 1\right)\left(-2\right)\left(\cos x + 2\right)^{-3}\left(-\sin x\right)$$
$$= \frac{-2\sin x\left(\cos x + 2\right) + 2\sin x\left(2\cos x + 1\right)}{\left(\cos x + 2\right)^3}$$
$$= \frac{2\sin x\left(-\cos x - 2 + 2\cos x + 1\right)}{\left(\cos x + 2\right)^3}$$
$$= \frac{2\sin x\left(\cos x - 1\right)}{\left(\cos x + 2\right)^3}$$

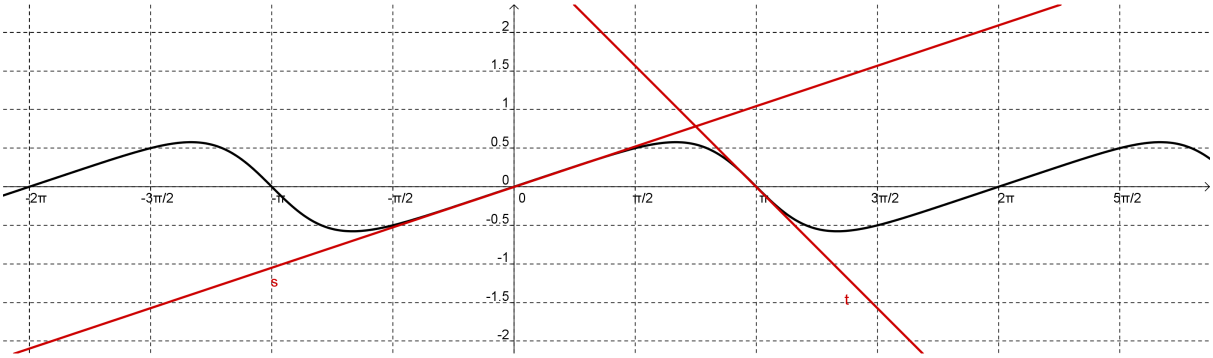
$f''(x)=0 \Leftrightarrow \sin x=0$ ou $\cos x=1 \Leftrightarrow x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Racines dans D : 0 et π.

Le facteur $(\cos x-1)$ intervenant dans $f''(x)$ est toujours ≤ 0 puisque $\cos x\leq 1$. Le facteur $\sin x$ par contre change de signe en chacune des racines $k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. Par conséquent, $f''(x)$ change de signe en 0 et π et on a deux points d'inflexion sur D : $O(0,0)$ et $I(\pi,0)$. De plus, $f''(x)\leq 0$ sur D, donc la concavité de la courbe est tournée vers la bas sur cet intervalle.

(5) $s : y=\dfrac{1}{3}x$ et $t : y=-x+\pi$

(6) Représentation graphique :



Question 2

(1) C.E. :

$$\begin{aligned}
&-1\leq \frac{1-x^2}{1+x^2}\leq 1 \;/\cdot(1+x^2)>0\\
&\Leftrightarrow -1-x^2\leq 1-x^2\leq 1+x^2 \;/+x^2\\
&\Leftrightarrow -1\leq 1\leq 1+2x^2
\end{aligned}$$

Les deux inégalités sont toujours vraies ! Donc : $\operatorname{dom} g=\operatorname{dom}_c g=\mathbb{R}$.

(2) g est paire car :

$$(\forall x\in\mathbb{R})\quad g(-x)=\operatorname{Arcsin}\left(\frac{1-(-x)^2}{1+(-x)^2}\right)=g(x).$$

(3) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)=\operatorname{Arcsin}(-1)=-\dfrac{\pi}{2}$, donc A.H. : $y=-\dfrac{\pi}{2}$

(4) Si $x\neq 0$, on a :

$$g'(x)=\frac{\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)'}{\sqrt{1-\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}}=\frac{\dfrac{-2x(1+x^2)-(1-x^2)2x}{(1+x^2)^2}}{\sqrt{1-\dfrac{1-2x^2+x^4}{(1+x^2)^2}}}$$

$$= \frac{\dfrac{-4x}{\left(1+x^2\right)^2}}{\sqrt{\dfrac{1+2x^2+x^4-1+2x^2-x^4}{\left(1+x^2\right)^2}}}$$

$$= -\frac{4x\cdot\left(1+x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2\sqrt{4x^2}}$$

$$= -\frac{2x}{|x|\left(1+x^2\right)}$$

Donc :

$$g'(x) = \begin{cases} -\dfrac{2}{1+x^2} & \text{si } x>0 \\ \dfrac{2}{1+x^2} & \text{si } x<0 \end{cases}$$

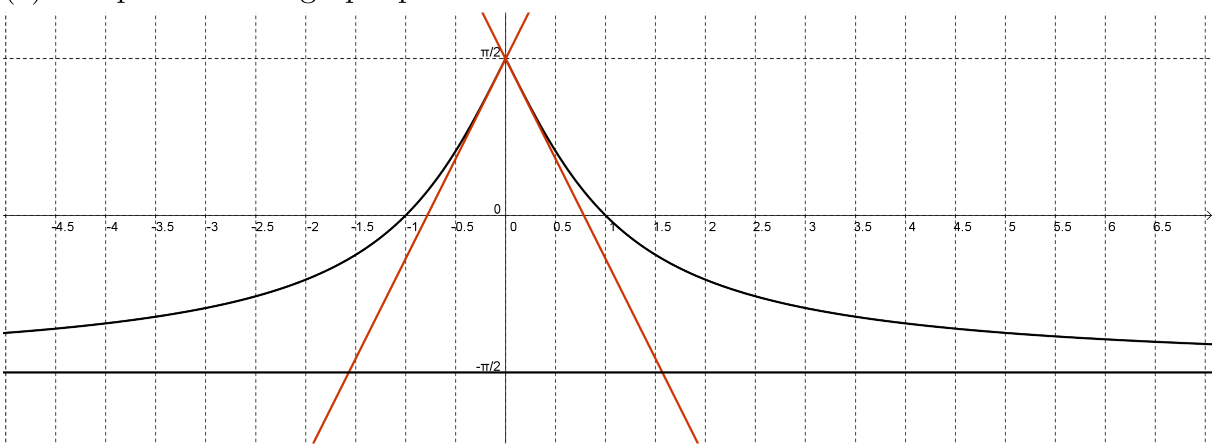
g n'est pas dérivable en 0 puisque $g_d{}'(0) \neq g_g{}'(0)$. En effet :

$$\begin{cases} g_d{}'(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} \overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{\underset{\text{H}}{=}} \lim\limits_{x\to 0^+} g'(x) = -2 \\ g_g{}'(0) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} \overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{\underset{\text{H}}{=}} \lim\limits_{x\to 0^-} g'(x) = 2 \end{cases}$$

Le point $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ est un point ***anguleux*** du graphe de g.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$\vert\vert$	$-$
$f(x)$	$-\frac{\pi}{2} \nearrow$	$\frac{\pi}{2}$ (M)	$\searrow \frac{\pi}{2}$

(5) Représentation graphique :



Question 3

(1) Voir cours.

(2) La fonction h est la composée de plusieurs fonctions ***continues*** et ***strictement monotones*** :

$$h : x \overset{h_1}{\longmapsto} 1-\sqrt{x} \overset{\text{Arctan}}{\longmapsto} \text{Arctan}\left(1-\sqrt{x}\right) \overset{\cdot 2}{\longmapsto} h\left(x\right)$$

- La fonction h_1 est continue et str. décroissante sur $\mathbb{R}_+$; $\text{im}h_1 = \left]-\infty,1\right]$.
- La fonction Arctan est continue et str. croissante et $\text{Arctan}\left(\left]-\infty,1\right]\right) = \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right]$.
- La fonction $k : x \mapsto 2x$ est continue et str. croissante et $k\left(\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right]\right) = \left]-\pi,\frac{\pi}{2}\right]$.

Il en résulte que h est une bijection strictement décroissante de $\mathbb{R}_+$ dans $I = \left]-\pi,\frac{\pi}{2}\right]$.

$\left(\forall y \in I\right)$

$$\begin{aligned}
& y = 2\,\text{Arctan}\left(1-\sqrt{x}\right) \\
\Leftrightarrow\ & \underbrace{\frac{y}{2}}_{\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[} = \text{Arctan}\left(1-\sqrt{x}\right) \\
\Leftrightarrow\ & \tan\left(\frac{y}{2}\right) = 1-\sqrt{x} \\
\Leftrightarrow\ & \sqrt{x} = \underbrace{1-\tan\left(\frac{y}{2}\right)}_{\geq 0} \\
\Leftrightarrow\ & x = \left(1-\tan\left(\frac{y}{2}\right)\right)^2
\end{aligned}$$

> Conditions sur y :
>
> a) $-\frac{\pi}{2} < \frac{y}{2} < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\pi < y < \pi$
>
> b) $1-\tan\left(\frac{y}{2}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{y}{2} \leq \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow y \leq \frac{\pi}{2}$
>
> Donc : les y qui ont un et un seul antécédent par h sont bien dans I.

Donc :

$$\begin{aligned}
h^{-1} : \left]-\pi,-\frac{\pi}{2}\right] &\to \mathbb{R}_+ \\
y &\mapsto \left(1-\tan\left(\frac{y}{2}\right)\right)^2
\end{aligned}$$

Comme h est strictement décroissante, il en est de même pour h^{-1}.

G. Lorang