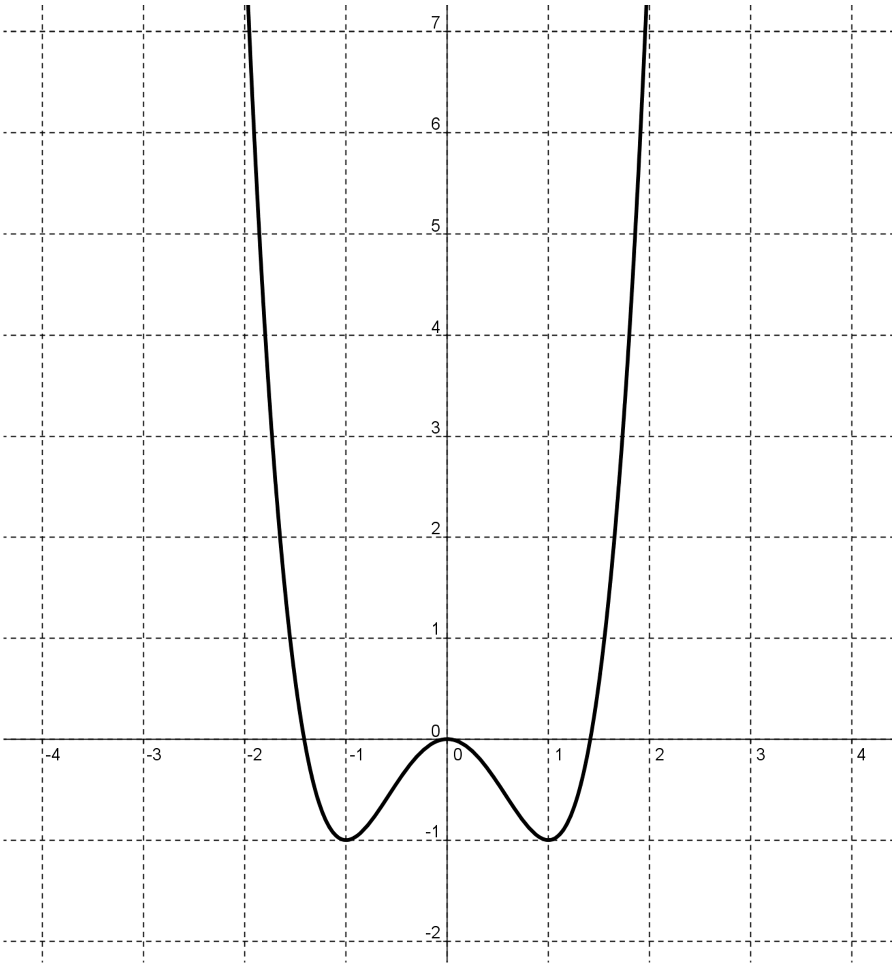
Nom : .... Prénom : ....

2B Devoir de mathématiques I,1 26.10.2012

Durée : 90′ ***Calculatrice non autorisée***

Question 1 18 (=4+11+3) points

Voici le graphe de la fonction $f : x \mapsto x^4 - 2x^2$.



(1) Répondre ***graphiquement*** aux questions suivantes :

a) Quel sont le domaine, le domaine de continuité et l'ensemble des images de f ?

b) Est-ce que f est injective ? Pourquoi ?

c) Est-ce que $g = f\,|_{[0,1]}$ est injective ? Pourquoi ?

(2) Déterminer a***lgébriquement*** tous les antécédents par f :

a) de 0 et de -1.

b) d'un réel $y \in]-1,0[$ et justifier qu'il y en a exactement …… ;

c) d'un réel $y > 0$ et justifier qu'il y en a exactement ……..

(3) Déduire de ce qui précède la réciproque de la fonction $g = f\,|_{[0,1]}$ et esquisser le graphe de g^{-1} sur la figure ci-dessus.

Question 2 — 12 points

On donne les fonctions $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2} - 1$ et $g : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$.

Déterminer le domaine et l'expression analytique la plus simple des fonctions :

a) $f \circ g$ b) $g \circ f$ c) $\dfrac{g \circ f}{f \circ g}$

en justifiant soigneusement votre réponse.

Question 3 — 16 points

Compléter le tableau sur cette feuille par les limites demandées. Si la limite n'existe pas, biffer la case correspondante ! On ne demande aucune justification !

Fonction	$\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$	$\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$	$\lim\limits_{x\to1} f(x)$	$\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$	$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$	$\lim\limits_{x\to0} f(x)$
$f(x) = \dfrac{x-3}{x(x-1)}$						
$f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2-2x+1}$						
$f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x-x^2}}$						
$f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^3-x^2}}$						
$f(x) = \dfrac{x^3-1}{\lvert x^3-x\rvert}$						

Question 4 — 14 (=8+4+2) points

Soit les fonctions $h : x \mapsto \dfrac{x^2-3x-10}{x^3-2x^2-5x+6}$ et $k : x \mapsto \dfrac{\lvert x+2\rvert - 7}{x^2-4x+3}$

(1) Ces fonctions sont-elles égales ? Sinon, donner « la plus grande » partie I de $\mathbb{R}$ sur laquelle $h\big|_I = k\big|_I$.

(2) Si nécessaire on distinguera les limites à gauche et à droite dans ce qui suit :

a) Calculer $\lim\limits_{x\to-2} h(x)$ et $\lim\limits_{x\to-2} k(x)$. h et k sont-elles continues en -2 ?

b) Calculer $\lim\limits_{x\to3} h(x)$ et $\lim\limits_{x\to3} k(x)$ et interpréter graphiquement les résultats.

(3) Esquisser les graphes de h et de k au voisinage des points d'abscisses –2 et 3.

G. Lorang