Nom : .... Prénom : ....

2B — Corrigé du devoir de I,1 — 26.10.2012

Question 1

(1) a) $\mathcal{D}f = \mathcal{D}_c f = \mathbb{R}$; $\operatorname{Im} f = [-1,+\infty[$.

b) f n'est pas injective car tous les réels de $[-1,+\infty[$ ont ***au moins deux*** antécédents par f.

c) $g = f\,|_{[0,1]}$ est injective car f est strictement décroissante sur $[0,1]$.

(2) a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2\left(x^2 - 2\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \pm\sqrt{2}$

$f(x) = -1 \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 = -1 \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 - 1\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

b) Si $y \in]-1,0[$ on a :

$$\begin{aligned}
f(x) = y &\Leftrightarrow x^4 - 2x^2 + 1 = y + 1 \\
&\Leftrightarrow \left(x^2 - 1\right)^2 = y + 1 \\
&\Leftrightarrow x^2 - 1 = \sqrt{y+1} \text{ ou } x^2 - 1 = \sqrt{y+1} \\
&\Leftrightarrow x^2 = \underbrace{1 + \sqrt{y+1}}_{>1 \text{ car } y+1>0} \text{ ou } x^2 = \underbrace{1 - \sqrt{y+1}}_{\substack{<1 \text{ car } y+1>0 \text{ et} \\ >0 \text{ car } y+1<1 \text{ donc } \sqrt{y+1}<1}} \\
&\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{1 + \sqrt{y+1}} \text{ ou } x = \pm\sqrt{1 - \sqrt{y+1}}
\end{aligned}$$

Donc, si $y \in]-1,0[$, alors y a exactement 4 antécédents par f, ce que l'on peut bien voir sur le graphique.

c) Si $y > 0$, alors en résolvant la même équation que sous b), on obtient :

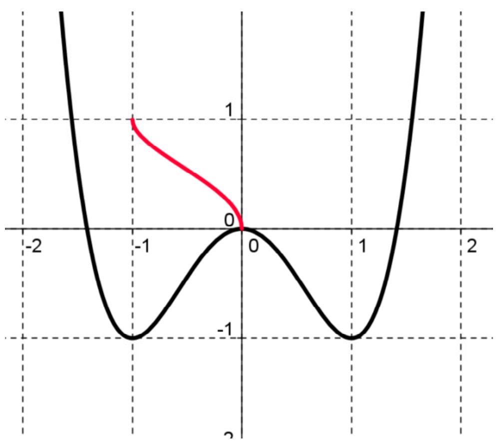
$$\begin{aligned}
f(x) = y \quad &\Leftrightarrow x^2 = \underbrace{1 + \sqrt{y+1}}_{>1 \text{ car } y+1>0} \text{ ou } x^2 = \underbrace{1 - \sqrt{y+1}}_{<0 \text{ car } y+1>1} \\
&\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{1 + \sqrt{y+1}}
\end{aligned}$$

Donc cette fois, la deuxième équation est impossible. Tout $y > 0$ admet donc exactement 2 antécédents, ce que l'on peut bien voir sur le graphique.

(3) On a :

$$\begin{aligned}
g^{-1} : [-1,0] &\to [0,1] \\
x &\mapsto \sqrt{1 - \sqrt{x+1}}
\end{aligned}$$

En rouge : le graphe de g^{-1}.



Question 2

$$f : x \mapsto \frac{1}{x^2} - 1 \qquad \text{et} \qquad g : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x+2}}.$$

a) Conditions d'existence :

$$f \circ g\left(x\right) = f\left(g\left(x\right)\right) \text{ existe } \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathcal{D}g \\ g\left(x\right) \in \mathcal{D}f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x+2}} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > -2$$

Donc : $\mathcal{D}\left(f \circ g\right) =]-2, +\infty[$.

$$f \circ g\left(x\right) = f\left(g\left(x\right)\right) = \frac{1}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}\right)^2} - 1 = x + 2 - 1 = x + 1$$

b) Conditions d'existence :

$$g \circ f\left(x\right) = g\left(f\left(x\right)\right) \text{ existe } \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathcal{D}f \\ f\left(x\right) > -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ \dfrac{1}{x^2} - 1 > -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ \dfrac{1}{x^2} + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq 0$$

Donc : $\mathcal{D}\left(g \circ f\right) = \mathbb{R}^*$.

$$g \circ f\left(x\right) = g\left(f\left(x\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{x^2} + 1}} = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{1 + x^2}{x^2}}} = \frac{\left|x\right|}{\sqrt{1 + x^2}}$$

c) Conditions d'existence : $\dfrac{g \circ f}{f \circ g}\left(x\right) = \dfrac{\left(g \circ f\right)\left(x\right)}{\left(f \circ g\right)\left(x\right)}$ existe

$$\Leftrightarrow x \in \mathcal{D}\left(g \circ f\right) \text{ et } \Leftrightarrow x \in \mathcal{D}\left(f \circ g\right) \text{ et } \left(f \circ g\right)\left(x\right) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^* \text{ et } x > -2 \text{ et } x + 1 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^* \text{ et } x > -2 \text{ et } x \neq -1$$

Donc : $\mathcal{D}\left(\dfrac{g \circ f}{f \circ g}\right) =]-2, +\infty[\setminus \left\{0, -1\right\}$

$$\frac{g \circ f}{f \circ g}\left(x\right) = \frac{\left|x\right|}{\left(x+1\right)\sqrt{1 + x^2}}$$

Question 3 — 16 points

Fonction	$\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$	$\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$	$\lim\limits_{x\to1} f(x)$	$\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$	$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$	$\lim\limits_{x\to0} f(x)$
$f(x)=\dfrac{x-3}{x(x-1)}$	$+\infty$	$-\infty$	/	$-\infty$	$+\infty$	/
$f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x^2-2x+1}$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	/	0	0
$f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x-x^2}}$	$+\infty$	/	$+\infty$	/	0	0
$f(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{x^3-x^2}}$	/	$+\infty$	$+\infty$	/	/	/
$f(x)=\dfrac{x^3-1}{\lvert x^3-x\rvert}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	/	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$

Question 4 — 14 (=8+4+2) points

$$h : x \mapsto \frac{x^2-3x-10}{x^3-2x^2-5x+6} \quad \text{et} \quad k : x \mapsto \frac{\lvert x+2\rvert-7}{x^2-4x+3}$$

(1) Condition d'existence pour h :

$$d(x)=x^3-2x^2-5x+6\neq 0$$

Racine évidente : $x=1$.

Schéma de Horner : $d(x)=(x-1)(x^2-x-6)=(x-1)(x+2)(x-3)$

Donc : $\mathcal{D}h=\mathbb{R}\setminus\{-2,1,3\}$ et pour tout $x\in\mathcal{D}h$:

$$h(x)=\frac{(x+2)(x-5)}{(x-1)(x+2)(x-3)}=\frac{x-5}{(x-1)(x-3)}$$

Condition d'existence pour k :

$$x^2-4x+3\neq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-3)\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1 \text{ et } x\neq 3$$

Donc : $\mathcal{D}k=\mathbb{R}\setminus\{1,3\}$

On peut déjà conclure que $h\neq k$ car les deux fonctions n'ont pas le même domaine.

$$\text{Or : } k(x)=\begin{cases}\dfrac{x+2-7}{(x-1)(x-3)}=\dfrac{x-5}{(x-1)(x-3)} & \text{si } x\geq -2\\[2ex] \dfrac{-x-2-7}{(x-1)(x-3)}=\dfrac{-x-9}{(x-1)(x-3)} & \text{si } x<-2\end{cases}$$

Donc, si $I=]-2,+\infty[$, on a : $h\big|_I=k\big|_I$

(Attention : l'intervalle I doit être pris ouvert car $h(-2)$ n'existe pas alors que $k(-2)$ existe !)

(2) Compte tenu des simplifications précédentes :

a) $\lim\limits_{x\to-2} h(x) = \lim\limits_{x\to-2} \dfrac{x-5}{(x-1)(x-3)} = \dfrac{-7}{-3\cdot(-5)} = -\dfrac{7}{15}$

h n'est pas continue en -2 car $h(-2)$ n'existe pas.

$\mathcal{G}_h$ admet un trou en $\left(-2,-\dfrac{7}{15}\right)$.

$\lim\limits_{x\to-2} k(x) = \lim\limits_{x\to-2} \dfrac{|x+2|-7}{(x-1)(x-3)} = k(-2) = \dfrac{-7}{(-3)(-5)} = -\dfrac{7}{15}$

k est continue en -2 car $\lim\limits_{x\to-2} k(x) = k(-2)$.

b) $\lim\limits_{x\to3^\pm} h(x) = \lim\limits_{x\to3^\pm} k(x) = \lim\limits_{x\to3^\pm} \dfrac{x-5}{(x-1)(x-3)} = "\dfrac{-2}{2\cdot 0^\pm}" = \mp\infty$, donc les deux graphes admettent une AV : $x=3$.

(3) En noir et pointillé le graphe $\mathcal{G}_h$ et en rouge le graphe $\mathcal{G}_k$.

Remarquer le trou dans $\mathcal{G}_h$ en $\left(-2,-\frac{7}{15}\right)$.