

*Durée : 90'**Calculatrice non autorisée**Formulaire trigonométrique (non annoté) autorisé*

Question 1

22 (=12+10) points

(1) **Question de cours** : démontrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ et en déduire $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$.

(2) Calculer les limites suivantes en justifiant soigneusement la réponse :

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{\tan 5x}$

b) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{(2x - \pi)^2}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \cos x}{x + 2 \cos x}$

Question 2

20 (=1+10+5+2+2) points

Soit la fonction : $f : x \mapsto \frac{x^3 - x^2 - x - 1}{2x^2 - 3x}$.

- (1) Déterminer les domaines de définition et de continuité de f .
- (2) Calculer les limites aux bornes du domaine de f et interpréter graphiquement les résultats. Etudier l'existence d'une asymptote oblique éventuelle.
- (3) Etudier la position de \mathcal{G}_f par rapport à l'asymptote oblique.
- (4) Esquisser le graphe de f et ses asymptotes au voisinage des bornes du domaine.
- (5) Sans faire aucun calcul, préciser les asymptotes obliques au graphe de la fonction $g = |f|$.

Question 3

10 points

Etudier la continuité de la fonction suivante et en particulier en $x = 0$ et en $x = 6$:

$$g : x \mapsto \begin{cases} \frac{x^4 - x^3 - 2x^2}{|x^2 - 2x|} & \text{si } x \neq 0 \text{ et } x \neq 2 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 6 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

Question 4

9 points

On donne la fonction $h : x \mapsto \frac{1-x}{x^2}$. Calculer à l'aide de la définition $h'(a)$ pour un réel a quelconque et préciser le domaine de dérivabilité de h . Esquisser le graphe de h avec ses tangentes (si possible) au voisinage des points d'abscisses 0, 1 et -1.