Nom : .... Prénom : ....

2B1 Corrigé du devoir II,1 17.01.2012

Durée : 90' ***Calculatrice non autorisée***

Formulaire trigonométrique (non annoté) autorisé

Question 1 22 (=12+10) points

(1) Démontrer que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ et en déduire $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$. (Voir cours)

(2) Calculer les limites suivantes en justifiant soigneusement la réponse :

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{\tan 5x}$ b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\left(2x-\pi\right)^2}$ c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x-\cos x}{x+2\cos x}$

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{\tan 5x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(6x)}{x}\cdot\dfrac{x}{\tan(5x)}$

$=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin y}{y/6}\cdot\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{z/5}{\tan z}$ $6x=y \Leftrightarrow x=\frac{y}{6}$, $5x=z \Leftrightarrow x=\frac{z}{5}$

$=\dfrac{6}{5}\cdot\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin y}{y}\cdot\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{z}{\tan z}$

$=\dfrac{6}{5}\cdot 1\cdot\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{z\cdot\cos z}{\sin z}=\dfrac{6}{5}$ ($\to 1$, $\to 1$)

b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\underbrace{(2x-\pi)}_{=2\cdot(x-\frac{\pi}{2})}{}^2}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{1-\sin\left(y+\frac{\pi}{2}\right)}{(2y)^2}$ $x-\frac{\pi}{2}=y \Leftrightarrow x=y+\frac{\pi}{2}$

$=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{1-\cos y}{4y^2}=\dfrac{1}{4}\cdot\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{1-\cos y}{y^2}$

$=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{8}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-\cos x}{x+2\cos x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cancel{x}\left(1-\frac{\cos x}{x}\right)}{\cancel{x}\left(1+\frac{2\cos x}{x}\right)}$ $\frac{\cos x}{x} \to 0$, $\frac{2\cos x}{x} \to 0$

Calcul à part :

$(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) \quad -1 \leq \cos x \leq 1 \quad \Big| : x \ (>0)$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{x} \leq \frac{\cos x}{x} \leq \frac{1}{x}$

$-\frac{1}{x} \to 0$ $\quad \frac{1}{x} \to 0$

Donc, d'après le th. du sandwich

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right) \leq \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x} \leq \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}$

$\Leftrightarrow \quad 0 \leq \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x} \leq 0$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-\cos x}{x+2\cos x} = 1$

Question 2 20 (=1+10+5+2+2) points

Soit la fonction : $f : x \mapsto \dfrac{x^3 - x^2 - x - 1}{2x^2 - 3x}$.

(1) Déterminer les domaines de définition et de continuité de f.

C.E : $2x^2 - 3x \neq 0 \Leftrightarrow x(2x-3) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ et $x \neq \frac{3}{2}$

$D_f = D_{cf} = \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{3}{2}\right\}$

(2) Calculer les limites aux bornes du domaine de f et interpréter graphiquement les résultats. Etudier l'existence d'une asymptote oblique évenuelle.

$\lim\limits_{x\to0^\pm} f(x) = \lim\limits_{x\to0^\pm} \dfrac{x^3-x^2-x-1}{x(2x-3)} = \dfrac{-1}{0^\pm\cdot(-3)} = \pm\infty$

$\Rightarrow$ AV : $x = 0$

$\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}^\pm} f(x) = \lim\limits_{x\to\frac{3}{2}^\pm} \dfrac{x^3-x^2-x-1}{x(2x-3)} = \dfrac{\frac{27}{8}-\frac{9}{4}-\frac{3}{2}-1}{\frac{3}{2}\cdot 0^\pm}$

$= \dfrac{-\frac{11}{8}}{\frac{3}{2}\cdot 0^\pm} = \mp\infty \Rightarrow$ A.V : $x = \frac{3}{2}$

- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x^{3}}{2x^{2}} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x}{2} = \pm\infty$

$\Rightarrow$ pas d'A.H.

- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x^3}{2x^3} = \frac{1}{2} \; (=a)$

- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - \frac{1}{2}x\right) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{\cancel{2x^3} - 2x^2 - 2x - 2 \cancel{- 2x^3} + 3x^2}{(2x^2-3x)\cdot 2}$

$= \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x^2-2x-2}{4x^2-6x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{4x^2} = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow$ A.O : $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$

(3) Etudier la position de $\mathcal{G}_f$ par rapport à l'asymptote oblique.

$\delta(x) = f(x) - \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right)$

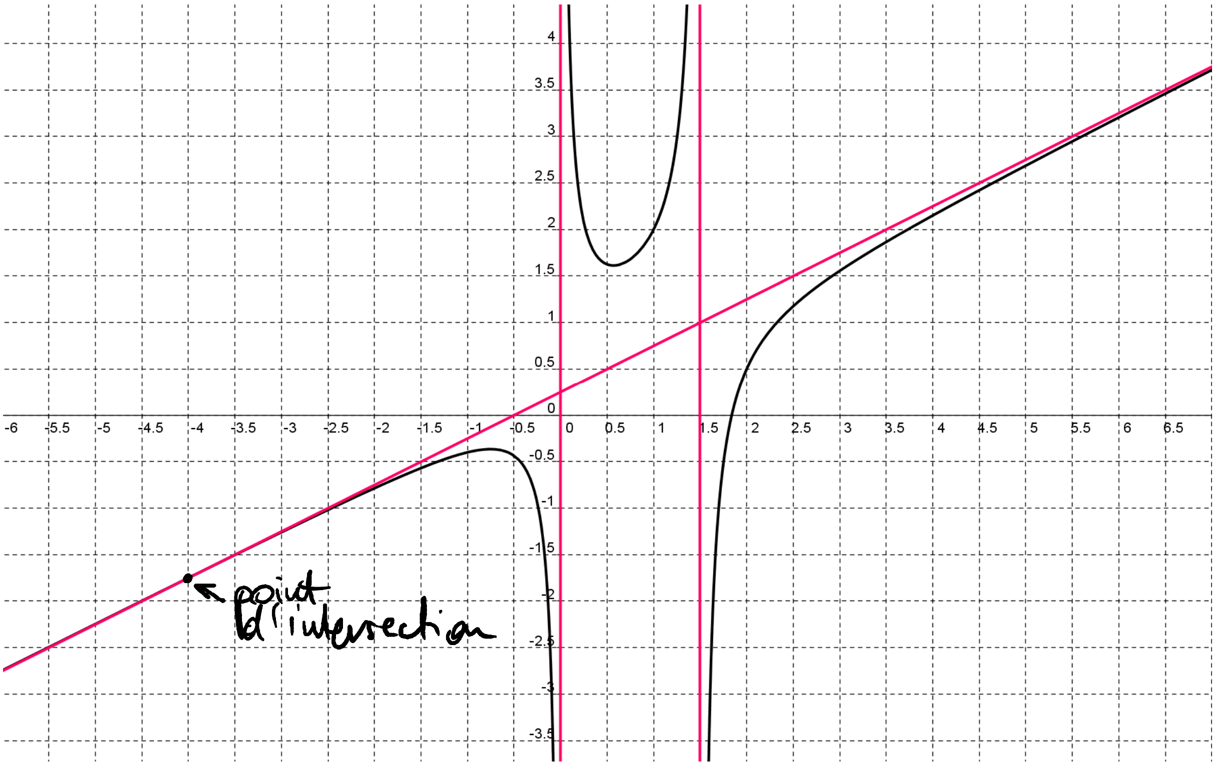
$= \frac{x^2-2x-2}{4x^2-6x} - \frac{1}{4} = \frac{4x^2-8x-8-(4x^2-6x)}{4(4x^2-6x)}$

$= \frac{-2x-8}{8x(2x-3)}$

$= \frac{-x-4}{4x(2x-3)}$

x		-4		0		$\frac{3}{2}$	
$-x-4$	$+$	0	$-$		$-$		$-$
$2x(2x-3)$	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$
$\delta(x)$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$
Position de Gf / A.O	Gf/A.O.	Point d'inter. $(-4, -\frac{7}{8})$	A.O/Gf	$\Vert$	Gf/AO	$\Vert$	A.O/Gf

(4) Esquisser le graphe de f et ses asymptotes au voisinage des bornes du domaine.



(5) Sans faire aucun calcul, préciser les asymptotes obliques au graphe de la fonction $g = |f|$.

Les asymptotes obliques de G_g sont les droites :

A.O.D : $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$

A.O.G : $y = -\frac{x}{2} - \frac{1}{4}$

L'A.O.G est la droite symétrique de l'A.O.D p.r. à l'axe des x.

Question 3 10 points

Etudier la continuité de la fonction

$$g : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^4 - x^3 - 2x^2}{\left|x^2 - 2x\right|} \text{ si } x \neq 0 \text{ et } x \neq 2 \\ 6 \text{ si } x = 2 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

On a : $D_g = \mathbb{R}$. Il est clair que g est continue en tout réel différent de 0 et 2. Analysons si g est continue en 0 ou en 2.

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2(x^2 - x - 2)}{|x(x-2)|}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{|x| \cancel{x^2} (x^2 - x - 2)}{\cancel{|x|} \cdot |x-2|}$$

$\to -2$, $\to 2$, 1

$$= \lim_{x \to 0} |x| \cdot \frac{-2}{2} = 0 = g(0)$$

Donc g est continue en 0.

$$\lim_{x \to 2^\pm} g(x) = \lim_{x \to 2^\pm} \frac{x^2 (x-2)(x+1)}{|x| \cdot |x-2|}$$

$$= \lim_{x \to 2^\pm} \frac{x^{\cancel{2}} \cancel{(x-2)} (x+1)}{\cancel{x} \cdot [\pm \cancel{(x-2)}]}$$

$$= \frac{2 \cdot 3}{\pm 1} = \pm 6$$

Donc g est continue à droite en 2 car $\lim_{x \to 2^+} g(x) = 6 = g(2)$ mais g

n'est pas continue en 2 car $\lim\limits_{x \to 2^-} g(x) \neq \lim\limits_{x \to 2^+} g(x)$

$\mathcal{G}_g$ admet en 2 un saut d'amplitude $6-(-6)=12$

Donc $D_c g = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

Question 4 9 points

On donne la fonction $h : x \mapsto \dfrac{1-x}{x^2}$. Calculer à l'aide de la définition $h'(a)$ pour un réel a quelconque et préciser le domaine de dérivabilité de h. Esquisser le graphe de h et au voisinage des points d'abscisses 0, 1 et -1.

$(\forall a \in \mathbb{R}^*)$ $h'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{h(x)-h(a)}{x-a}$

$= \lim\limits_{x \to a} \dfrac{\frac{1-x}{x^2} - \frac{1-a}{a^2}}{x-a}$

$= \lim\limits_{x \to a} \dfrac{(1-x)a^2-(1-a)x^2}{a^2x^2(x-a)}$

$= \lim\limits_{x \to a} \dfrac{a^2-a^2x-x^2+ax^2}{a^2x^2(x-a)}$

$= \lim\limits_{x \to a} \dfrac{a^2-x^2-ax(a-x)}{a^2x^2(x-a)}$

$= \lim\limits_{x \to a} \dfrac{(a-x)(a+x)-ax(a-x)}{a^2x^2(x-a)}$

$= \lim\limits_{x \to a} \dfrac{\overset{-1}{\cancel{(a-x)}}(a+x-ax)}{a^2x^2\underset{1}{\cancel{(x-a)}}} = \dfrac{a^2-2a}{a^4}$

$= \dfrac{a-2}{a^3}$

Le résultat est un réel ssi $a \neq 0$.

Donc $D_{h'} = \mathbb{R}^*$.

$$h'(1) = \frac{1-2}{1^3} = -1 \quad \text{et} \quad h'(-1) = \frac{-3}{(-1)^3} = 3$$

C_h admet une A.V. en $x = 0$ car

$$\lim_{x \to 0} h(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$