Nom : .... Prénom : ....

2B Devoir de mathématiques II,1 10.05.2013

Durée : 60' ***Calculatrice autorisée***

Question 1 — 16 (=8+8) points

(1) Montrer que si une fonction f est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et si pour tout x de $]a,b[$, $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur $]a,b[$.

(2) Soit la fonction $g : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et $0 < a < b$ deux réels donnés.

a) Justifier qu'il existe au moins un réel $c \in]a,b[$ tel que :

$$g'(c) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}.$$

b) Déterminer le ou les réels c en fonction de a et de b, puis appliquer votre formule au calcul de c si $a = 4$ et $b = 9$.

Question 2 — 34 (=1+6+11+11+5) points

Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{x} - 1}$.

(1) Déterminer le domaine de définition et de continuité de f.

(2) Etudier et interpréter graphiquement les limites de f aux bornes du domaine. Etudier également l'existence d'une asymptote à $\mathcal{G}_f$ en $+\infty$.

(3) Calculer la dérivée de f et étudier en particulier la dérivabilité de f en 0. En déduire le domaine de dérivabilité de f et le tableau de variations de f. Préciser l'équation de la tangente ou demi-tangente à $\mathcal{G}_f$ en $(0,0)$.

(4) Calculer f'' et étudier en particulier si $f''(0)$ existe. Préciser le domaine de f''. En déduire la concavité du graphe de f ainsi que les points d'inflexion éventuels.

(5) Dresser un tableau des images de f et tracer le graphe de la fonction dans un repère orthonormé du plan.

Question 3 — 10 (=5+5) points

Calculer les limites suivantes en utilisant la règle de l'Hopital :

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x - \tan x}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+3x} - 1 - x}{\sqrt{1+2x} - 1 - x}$

G. Lorang