Nom : .... Prénom : ....

2B Corrigé du devoir II,1 10.05.2013

Question 1

(1) Voir manuel.

(2) a) L'existence du réel c est assurée par le théorème de Lagrange ou théorème des accroissements finis, car la fonction g est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.

b) $g'\left(c\right)=\dfrac{g(b)-g(a)}{b-a} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{c^2}=\dfrac{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}{b-a}$

$\Leftrightarrow -\dfrac{1}{c^2}=-\dfrac{1}{ab} \Leftrightarrow c^2=ab \Leftrightarrow c=\sqrt{ab}$ ou $c=-\sqrt{ab}$.

La solution négative est à écarter puisque on cherche une solution $c\in]a,b[$ et on a supposé que $0<a<b$. Donc la solution unique est : $c=\sqrt{ab}$: c'est la moyenne géométrique de a et de b. Si $a=4$ et $b=9$, alors $c=\sqrt{4\cdot 9}=6$.

Question 2

Soit la fonction $f:x\mapsto \dfrac{x}{\sqrt{x}-1}$.

(1) $Df=D_cf=\mathbb{R}_+\setminus\left\{1\right\}$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0} f\left(x\right)=0=f\left(0\right)$, car f est continue en 0.

$\lim\limits_{x\to 1^\pm} f\left(x\right)=\dfrac{1}{0^\pm}=\pm\infty$, donc $\mathcal{G}_f$ admet une A.V. : $x=1$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x}\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}}=+\infty$, donc pas d'A.H.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f\left(x\right)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}=\dfrac{1}{+\infty}=0^+$, donc pas d'A.O.

$\mathcal{G}_f$ admet une branche parabolique de direction asymptotique $\left(Ox\right)$.

(3) f est certainement dérivable sur $\mathbb{R}_+^*\setminus\left\{1\right\}$, car le numérateur et le dénominateur de $f\left(x\right)$ sont dérivables sur cet ensemble et le dénominateur ne s'y annule pas. Donc :

$$\left(\forall x\in\mathbb{R}_+^*\setminus\left\{1\right\}\right)\qquad f'\left(x\right)=\frac{\sqrt{x}-1-x\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}=\frac{\sqrt{x}-1-\dfrac{\sqrt{x}}{2}}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}=\frac{\sqrt{x}-2}{2\left(\sqrt{x}-1\right)^2}$$

Etudions la dérivabilité de f en 0 :

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x\left(\sqrt{x}-1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x}-1}=-1\,.$$

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0)=-1$.

On peut résumer l'étude en disant que $Df'=\mathbb{R}_+\setminus\{1\}$ et :

$$\left(\forall x\in\mathbb{R}_+\setminus\{1\}\right)\qquad f'(x)=\frac{\sqrt{x}-2}{2\left(\sqrt{x}-1\right)^2}$$

Equation de la demi-tangente à $\mathcal{G}_f$ en $(0,0)$: $y=-x$ et $x\geq 0$.

Tableau de variations :

x	0		1		4		$+\infty$
$f'(x)$	-1	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0 H	$\searrow$	$-\infty$ $\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	4 m	$\nearrow$	$+\infty$

(4) f' est certainement dérivable sur $\mathbb{R}_+^*\setminus\{1\}$:

$$\begin{aligned}\left(\forall x\in\mathbb{R}_+^*\setminus\{1\}\right)\qquad f''(x)&=\frac{1}{2}\left[\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-1\right)^{-2}\right]'\\&=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-1\right)^{-2}-2\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-1\right)^{-3}\frac{1}{2\sqrt{x}}\right]\\&=\frac{\sqrt{x}-1-2\left(\sqrt{x}-2\right)}{4\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)^3}\\&=\frac{3-\sqrt{x}}{4\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)^3}\end{aligned}$$

$$\cancel{f''(0)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}\overset{"\frac{0}{0}"}{\underset{(H)}{=}}\lim_{x\to 0^+}f''(x)=\frac{3}{4\left(0^+\right)\left(-1\right)}=-\infty\,.$$

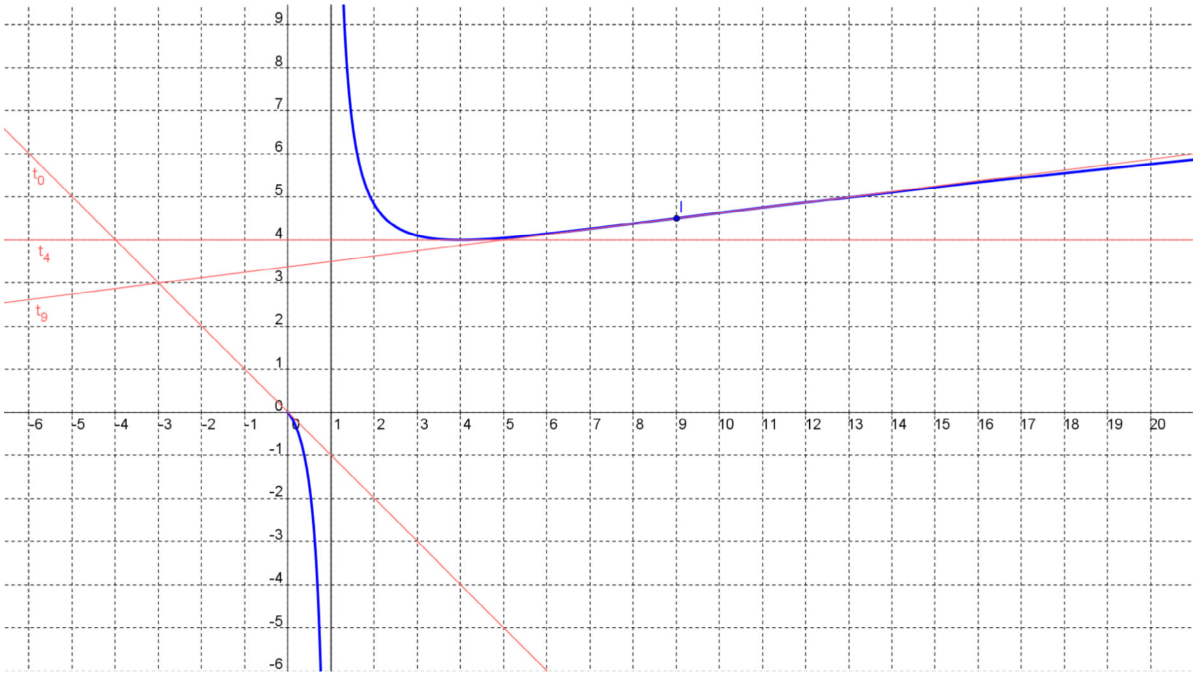
Donc $f''(0)$ n'existe pas, c.-à-d. $Df''=\mathbb{R}_+^*\setminus\{1\}$.

$f''(x)=0\Leftrightarrow\sqrt{x}=3\Leftrightarrow x=9$.

x	0		1		9		$+\infty$
$3-\sqrt{x}$		$+$		$+$	0	$-$	
$\left(\sqrt{x}-1\right)^3$		$-$	0	$+$		$+$	
$f''(x)$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$\mathcal{G}_f$		$\cap$ $\downarrow$	$\Vert$	$\cup$ $\uparrow$	PI	$\cap$ $\downarrow$	

Point d'inflexion : $I(9;4,5)$

(5) Représentation graphique :



Question 3

(1) $$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x-\tan x}$$

$$\underset{(H)}{\overset{"\frac{0}{0}"}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1-\left(1+\tan^2 x\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{-\tan^2 x}$$

$$\underset{(H)}{\overset{"\frac{0}{0}"}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{-2\tan x\left(1+\tan^2 x\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{-2\left(1+\tan^2 x\right)}=-\frac{1}{2}$$

(2) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+3x}-1-x}{\sqrt{1+2x}-1-x}$$

$$\underset{(H)}{\overset{"\frac{0}{0}"}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}\left(1+3x\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot 3-1}{\frac{2}{2\sqrt{1+2x}}-1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+3x\right)^{-\frac{2}{3}}-1}{\left(1+2x\right)^{-\frac{1}{2}}-1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{2}{3}\left(1+3x\right)^{-\frac{5}{3}}\cdot 3}{-\frac{1}{2}\left(1+2x\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2}=\frac{-2}{-1}=2$$