Nom : .... Prénom : ....

2B Corrigé du devoir III,2 21.06.2013

Question 1

(1) $\mathcal{D}f = \mathcal{D}_c f = \mathbb{R}$.

(2) Racines :

$$\begin{aligned} &f(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \text{ ou } \cos x = 1 \\ &\Leftrightarrow x = k \cdot \pi \text{ ou } x = k \cdot 2\pi \\ &\Leftrightarrow x = k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

(3) f est périodique de période 2π car :

$$\begin{aligned} &f(x+2\pi) = \sin(x+2\pi)\left(1-\cos(x+2\pi)\right) \\ &= \sin x\left(1-\cos x\right) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Il suffit donc d'étudier f sur un intervalle de longueur 2π , on choisit $[-\pi, \pi]$.

f est impaire car :

$$f(-x) = \sin(-x)\left(1-\cos(-x)\right) = -\sin x\left(1-\cos x\right) = -f(x)$$

Comme f est impaire, on peut réduire le domaine d'étude de f à $[0, \pi]$.

(4) $\mathcal{D}f' = \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} &f'(x) = \cos x\left(1-\cos x\right) + \sin x \cdot \sin x \\ &= \cos x - \cos^2 x + \sin^2 x \\ &= \cos x - \cos(2x) \end{aligned}$$

D'autres expressions de $f'(x)$ sont possibles :

- $f'(x) = -2\sin\left(\dfrac{x+2x}{2}\right)\sin\left(\dfrac{x-2x}{2}\right) = 2\sin\left(\dfrac{3x}{2}\right)\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$ (forme factorisée !)
- $f'(x) = \cos x - \cos^2 x + \left(1-\cos^2 x\right) = -2\cos^2 x + \cos x + 1$

$$\begin{aligned} &f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = \cos(2x) \\ &\Leftrightarrow x = 2x + 2k\pi \text{ ou } x = -2x + 2k\pi \\ &\Leftrightarrow -x = 2k\pi \text{ ou } 3x = 2k\pi \\ &\Leftrightarrow x = 2k\pi \text{ ou } x = \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Solutions de cette équation dans $[0, \pi]$: 0 et $\dfrac{2\pi}{3}$.

Tableau de variations :

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	-2
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$ (M)	$\searrow$	0

On remarque qu'il n'y a pas de minimum en 0 puisque la fonction f est impaire ! (Comme f est croissante sur $[0,\frac{2\pi}{3}]$, elle est aussi croissante sur $[-\frac{2\pi}{3},0]$) On en déduit que le point (0,0) est un ***point d'inflexion à tangente horizontale***.

(5) Equation de la tangente à $\mathcal{G}_f$ en $x=\pi$:

$$t_\pi : y = f'(\pi)(x-\pi)+f(\pi)$$
$$\Leftrightarrow y = -2x+2\pi$$

(6) $\mathcal{D}f'' = \mathbb{R}$

$$f''(x) = -\sin x + 2\sin(2x)$$
$$= -\sin x + 4\sin x\cos x$$
$$= \sin x(4\cos x - 1)$$

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \text{ ou } \cos x = \frac{1}{4}$$
$$\Leftrightarrow x = k\pi \text{ ou } x = \mathrm{Arccos}\left(\tfrac{1}{4}\right)+2k\pi \text{ ou } x = -\mathrm{Arccos}\left(\tfrac{1}{4}\right)+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

Solutions dans $[0,\pi]$: 0, $\mathrm{Arccos}\left(\tfrac{1}{4}\right)$ et π.

Remarquons que $f''(x)$ a le signe de $4\cos x - 1$ sur $[0,\pi]$ puisque $\sin x$ est positif sur cet intervalle.

x	0		$\mathrm{Arccos}\left(\tfrac{1}{4}\right)$		π
$f''(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$\mathcal{G}_f$	P.I. à tangente horizontale		P.I.		P.I.

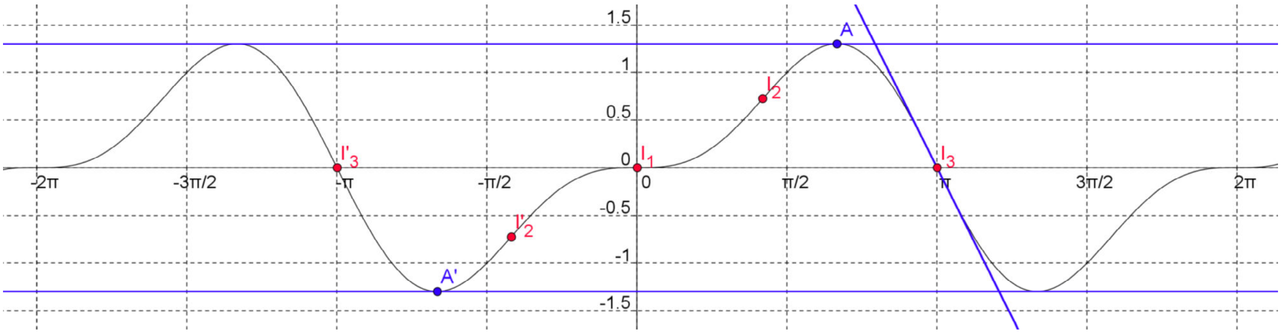
Remarquons que $f''(x)$ change de signe en 0 et en π puisque le facteur $\sin x$ change de signe alors que le facteur $4\cos x - 1$ n'y change pas de signe.

Les points d'inflexion sur $[0,\pi]$ sont donc :

$$I_1(0,0),\ I_2\left(\mathrm{Arccos}\left(\tfrac{1}{4}\right),\frac{3\sqrt{15}}{16}\right) \text{ et } I_3(\pi,0)$$

$$f\left(\operatorname{Arccos}\left(\tfrac{1}{4}\right)\right)=\sin\left(\operatorname{Arccos}\left(\tfrac{1}{4}\right)\right)\left(1-\cos\left(\operatorname{Arccos}\left(\tfrac{1}{4}\right)\right)\right)$$
$$=\sqrt{1-\tfrac{1}{16}}\cdot\left(1-\tfrac{1}{4}\right)=\tfrac{\sqrt{15}}{4}\cdot\tfrac{3}{4}=\tfrac{3\sqrt{15}}{16}$$

(7) Représentation graphique sur $[-2\pi,2\pi]$.



Question 2

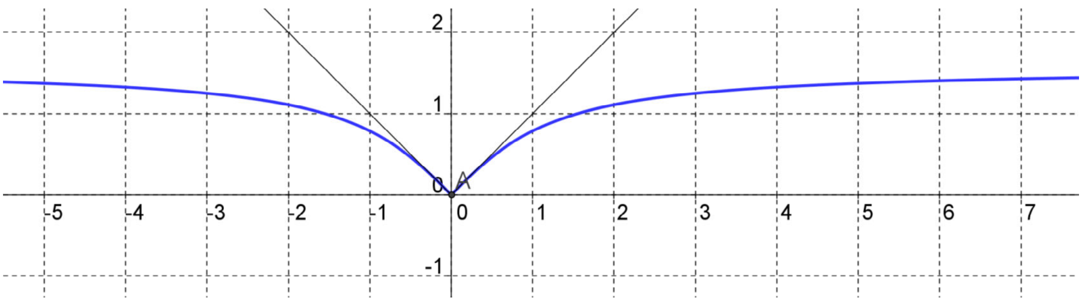
(1) $g(x)=\operatorname{Arctan}|x|=\begin{cases}\operatorname{Arctan}x & \text{si } x\geq 0\\ \operatorname{Arctan}(-x) & \text{si } x\leq 0\end{cases}$

La fonction g est paire et continue sur $\mathbb{R}$ comme composée de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$. Elle est certainement dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et

$$g'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x^2} & \text{si } x>0\\ \dfrac{-1}{1+x^2} & \text{si } x>0\end{cases}$$

$$\begin{aligned} g'_d(0)&=\lim_{x\to 0^+}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}\\ &\underset{(H)}{\overset{"\frac{0}{0}"}{=}}\lim_{x\to 0^+} g'(x)\\ &=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1+x^2}\\ &=1\end{aligned}$$

De même (ou en utilisant la parité de la fonction) : $g'_g(0)=-1$. Donc g n'est pas dérivable en 0, $Dg'=\mathbb{R}^*$ et le point $(0,0)$ est un ***point anguleux*** du graphe.



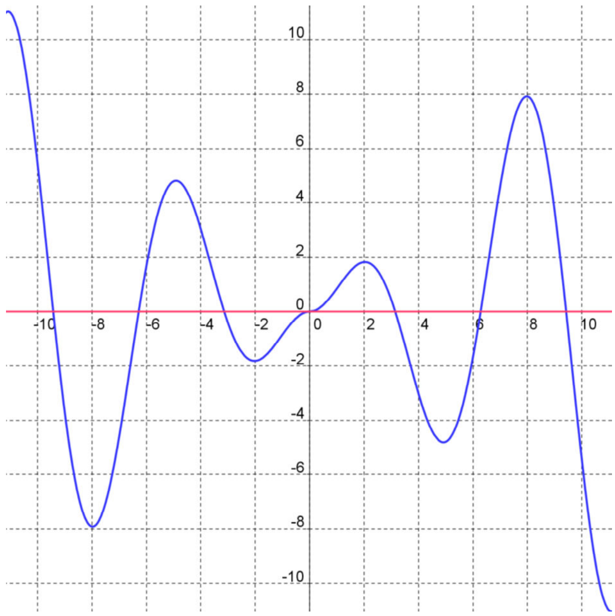
(2) $\quad h(x) = |x| \cdot \sin x = \begin{cases} x \cdot \sin x & \text{si } x \geq 0 \\ -x \cdot \sin x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

La fonction h est impaire et continue sur $\mathbb{R}$ comme composée de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$. Elle est certainement dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et :

$$h'(x) = \begin{cases} \sin x + x\cos x & \text{si } x > 0 \\ -\sin x - x\cos x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} h'_d(0) &= \lim_{x \to 0^+} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} \\ &= \lim_{x \to 0^+} \sin x \\ &= 0 \end{aligned}$$

De même (ou en utilisant la parité de la fonction) : $h'_g(0) = 0$. Donc h est dérivable en 0, $h'(0) = 0$ et $Dh' = \mathbb{R}$. Vu la parité de la fonction, le point (0,0) est un ***d'inflexion à tangente horizontale***.



(3) $\quad k : x \mapsto \sqrt[3]{\operatorname{Arcsin} x}$.

La fonction k est continue sur $[-1,1]$ et impaire.

$\mathcal{D}k' =]-1,1[\setminus \{0\}$ et

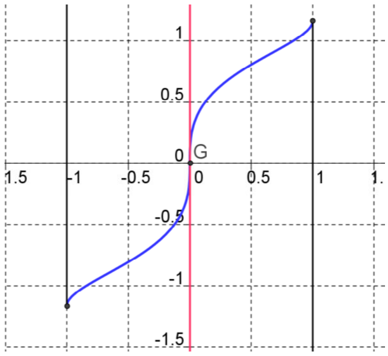
$$k'(x) = \frac{1}{3} \operatorname{Arcsin}^{-\frac{2}{3}}(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{\operatorname{Arcsin}^2(x)} \cdot \sqrt{1-x^2}}$$

k n'est pas dérivable en 0 car

$$\cancel{k'(0)} = \lim_{x \to 0} \frac{k(x) - k(0)}{x - 0} \underset{(H)}{\overset{"\frac{0}{0}"}{=}} \lim_{x \to 0} k'(x) = +\infty$$

(On voit de même que k n'est ni dérivable en 1 ni en -1.)

Le point (0,0) est un ***point d'inflexion à tangente verticale*** du graphe.



Question 3

(1) $$\lim_{x\to -1}\frac{\pi-\operatorname{Arccos}x}{\sqrt{x+1}} \underset{(H)}{\overset{"\frac{0}{0}"}{=}} \lim_{x\to -1}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}} = \lim_{x\to -1}\frac{\frac{1}{\sqrt{\left(1-x\right)\cancel{\left(1+x\right)}}}}{\frac{1}{2\cancel{\sqrt{x+1}}}} = \frac{2}{\sqrt{1-x}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

(2) $$\lim_{x\to 0}\cot\left(3x\right)\cdot\operatorname{Arcsin}\left(2x\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{Arcsin}\left(2x\right)}{\tan\left(3x\right)} \underset{(H)}{\overset{"\frac{0}{0}"}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}}{3\left(1+\tan^2\left(3x\right)\right)} = \frac{2}{3}$$

G. Lorang