Nom : .... Prénom : ....

2B1 Corrigé du devoir I,1 22.10.2013

Question 1

Fonction	$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$	$\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$	$\lim\limits_{x\to 3} f(x)$	Interpr. graphique
1) $f(x)=\sqrt{3-x}$	0	/	0	f est cont. en 3
2) $f(x)=\dfrac{12-4x}{\left\|x-3\right\|}$	4	-4	/	$\mathcal{G}_f$ admet un saut d'amplitude -8 à l'abscisse 3 et f discontinue en 3
3) $f(x)=\dfrac{-5}{(x-3)^2}$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	AV : $x=3$
4) $f(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2-9}}$	/	$+\infty$	$+\infty$	AV : $x=3$
5) $f(x)=\dfrac{-(x-3)(x+4)}{(2x+1)(x-3)}$	-1	-1	-1	$\mathcal{G}_f$ admet un trou en (3,–1) et f discontinue en 3

$$(*) : \left(\forall x \in \mathbb{R}\setminus\left\{-\tfrac{1}{2},3\right\}\right) \quad f(x)=\frac{-x-4}{2x+1}$$

Question 2

Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{|x-3|-1}{3-|1-2x|}$.

(1) C.E : $|1-2x| \neq 3 \Leftrightarrow 1-2x\neq 3$ et $1-2x \neq -3 \Leftrightarrow x\neq -1$ et $x \neq 2$

Donc : $\mathcal{D}f = \mathbb{R}\setminus\{-1,2\}$.

(2) Valeurs critiques : 3, $\frac{1}{2}$, –1 et 2

x	$-\infty$	-1		$\frac{1}{2}$		2		3	$+\infty$
$\|x-3\|$	$-x+3$		$-x+3$		$-x+3$		$-x+3$	0	$x-3$
$\|1-2x\|$	$1-2x$		$1-2x$	0	$2x-1$		$2x-1$		$2x-1$
$f(x)$	$\dfrac{-x+2}{2+2x}$	X	$\dfrac{-x+2}{2+2x}$	$\frac{1}{2}$	$\dfrac{-x+2}{4-2x}=\dfrac{1}{2}$	X	$\dfrac{-x+2}{4-2x}=\dfrac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\dfrac{x-4}{4-2x}$

(3) a) $\lim\limits_{x\to -1^{\pm}} f\left(x\right)=\dfrac{3}{0^{\pm}}=\pm\infty$, donc $AV : x=-1$.

b) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}^{-}} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}^{-}} \dfrac{-x+2}{2+2x}=\dfrac{1}{2}=f\left(\dfrac{1}{2}\right)$

$\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}^{+}} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}^{+}} \dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}=f\left(\dfrac{1}{2}\right)$

f est continue en $\frac{1}{2}$.

c) $\lim\limits_{x\to 2^{-}} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 2^{-}} \dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}\neq f\left(\dfrac{1}{2}\right)$

$\lim\limits_{x\to 2^{+}} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 2^{+}} \dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}\neq f\left(\dfrac{1}{2}\right)$

f est discontinue en 2. $\mathcal{G}_f$ admet un trou en $\left(2,\frac{1}{2}\right)$.

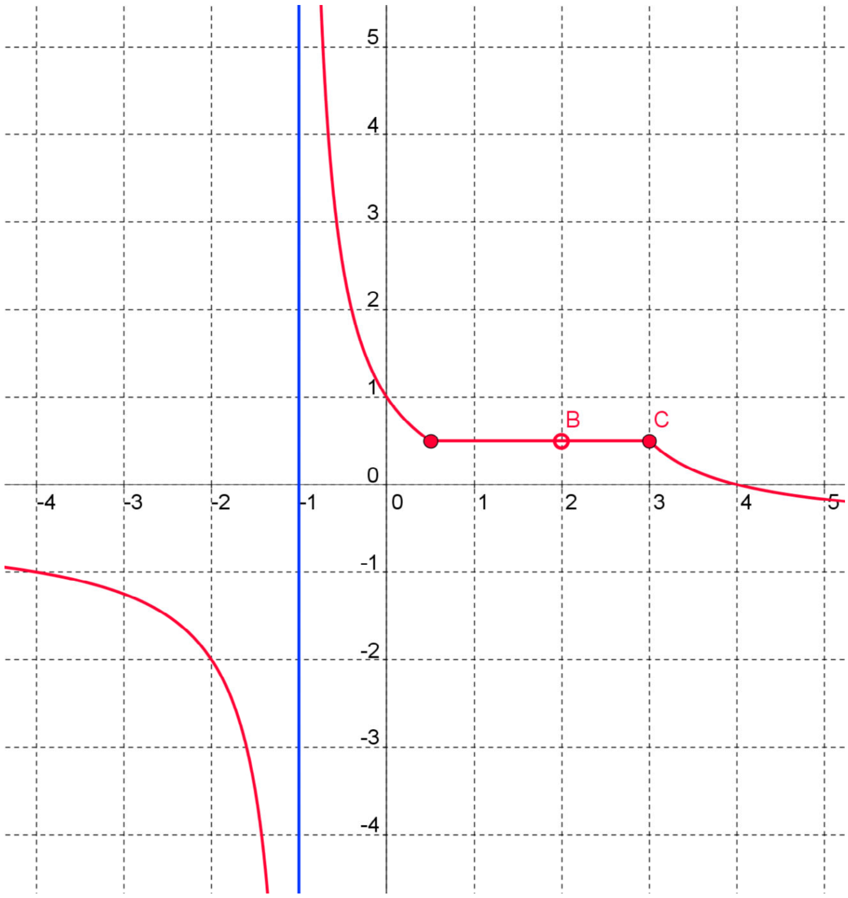
d) $\lim\limits_{x\to 3^{-}} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 3^{-}} \dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}=f\left(3\right)$

$\lim\limits_{x\to 3^{+}} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 3^{+}} \dfrac{x-4}{4-2x}=\dfrac{-1}{-2}=\dfrac{1}{2}=f\left(3\right)$

f est continue en 3.

$\mathcal{D}_c f=\mathcal{D}f=\mathbb{R}\setminus\left\{-1,2\right\}$.

(4)



Question 3

$g : x \mapsto \dfrac{x^3 - 7x + 6}{x + 5 - \sqrt{8x + 28}}$.

(1) C.E. : $\begin{cases} 8x + 28 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{7}{2} & (1) \\ x + 5 \neq \sqrt{8x + 28} & (2) \end{cases}$

Pour $x \geq -\frac{7}{2}$, on a :

$$\begin{aligned} &\underbrace{x + 5}_{>0} \neq \underbrace{\sqrt{8x + 28} \; / \left(\;\right)^2}_{>0} \\ &\Leftrightarrow \left(x + 5\right)^2 \neq 8x + 28 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 10x + 25 \neq 8x + 28 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow x \neq 1 \text{ et } x \neq -3 \end{aligned}$$

$\mathcal{D}_g = [-\frac{7}{2}, +\infty[\setminus \left\{1, -3\right\}$

(2) $\left(\forall x \in \mathcal{D}_g\right) \quad g\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow p\left(x\right) = x^3 - 7x + 6 = 0$

On pose : $p\left(x\right) = x^3 - 6x + 7$ et on en détermine une racine évidente :

$p\left(1\right) = 0$, donc $p\left(x\right)$ est divisible par $x - 1$.

A l'aide du schéma de Horner on obtient :

$$p\left(x\right) = \left(x - 1\right)\left(x^2 + x - 6\right) = \left(x - 1\right)\left(x - 2\right)\left(x + 3\right)$$

Donc $g\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow x = 2$, les autres racines de p étant à exclure !

(3) $\left(\forall x \in \mathcal{D}_g\right)$

$$\begin{aligned} g\left(x\right) &= \frac{\left(x-1\right)\left(x-2\right)\left(x+3\right)\left(x+5+\sqrt{8x+28}\right)}{\left(x+5-\sqrt{8x+28}\right)\left(x+5+\sqrt{8x+28}\right)} \\ &= \frac{\left(x-1\right)\left(x-2\right)\left(x+3\right)\left(x+5+\sqrt{8x+28}\right)}{\left(x+5\right)^2 - \left(8x+28\right)} \\ &= \frac{\left(x-1\right)\left(x-2\right)\left(x+3\right)\left(x+5+\sqrt{8x+28}\right)}{x^2 + 2x - 3} \\ &= \frac{\cancel{\left(x-1\right)}\left(x-2\right)\cancel{\left(x+3\right)}\left(x+5+\sqrt{8x+28}\right)}{\cancel{\left(x-1\right)}\cancel{\left(x+3\right)}} \\ &= \left(x-2\right)\left(x+5+\sqrt{8x+28}\right) \end{aligned}$$

a) $\lim\limits_{x \to 1} g\left(x\right) = \lim\limits_{x \to 1} \left(x-2\right)\left(x+5+\sqrt{8x+28}\right) = -12 \neq g\left(1\right)$

g est discontinue en 1. $\mathcal{G}_g$ admet un trou en $\left(1, -12\right)$.

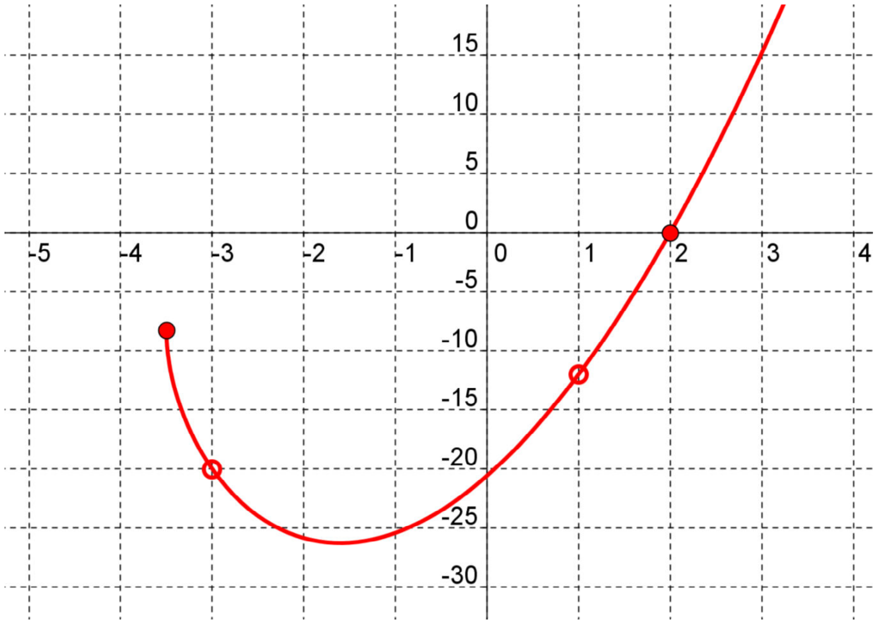
b) $\lim\limits_{x\to-3} g\left(x\right) = \lim\limits_{x\to-3}\left(x-2\right)\left(x+5+\sqrt{8x+28}\right) = -5\cdot 4 = -20 \neq g\left(-3\right)$

g est discontinue en –3. $\mathcal{G}_g$ admet un trou en $\left(-3,-20\right)$.

c) $\lim\limits_{x\to 2} g\left(x\right) = \lim\limits_{x\to 2}\left(x-2\right)\left(x+5+\sqrt{8x+28}\right) = 0 = g\left(2\right)$

g est continue en 2

(4) Graphe :



Bonus : $h : x \mapsto \left(x-2\right)\left(x+5+\sqrt{8x+28}\right)$ est un prolongement par continuité de g en 1 et en –3.

G. Lorang