Nom : .... Prénom : ....

2B1 Devoir de mathématiques II - I,2 3.12.2013

Question 1

(1) a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{-2x^5+3x^3-4}{6x^3-2x+8} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{-2x^5}{6x^3} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} -\dfrac{x^2}{3} = -\infty$

b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{6x^3-2x+8}{-2x^5+3x^3-4} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{6x^3}{-2x^5} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} -\dfrac{3}{x^2} = 0^-$

(2) a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^3-6x^2+2x+1}{(x-1)(2x+1)^2} \underset{\text{Schéma de Horner}}{=} \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\cancel{(x-1)}(3x^2-3x-1)}{\cancel{(x-1)}(2x+1)^2} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^2-3x-1}{(2x+1)^2} = -\dfrac{1}{9}$

b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{3x^3-6x^2+2x+1}{(x-1)(2x+1)^2} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^2-3x-1}{4x^2+4x+1} = \dfrac{3}{4}$

(3) a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1-6x}{|3x-6|} = \dfrac{-11}{0^+} = -\infty$

b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1-6x}{|3x-6|} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{-6x}{|3x|} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{-6x}{\pm 3x} = \mp 2$

(4) $4x^2-9x+5 = 4(x-1)(x-\frac{5}{4}) = (x-1)(4x-5)$

Les racines du trinôme sont 1 et $\frac{5}{4}$. Son tableau du signe est :

x		1		$\frac{5}{4}$	
$4x^2-9x+5$	+	0	−	0	+

a) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\sqrt{4x^2-9x+5}}{1-x}$ n'existe pas

b) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\sqrt{4x^2-9x+5}}{1-x} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\sqrt{\underbrace{(x-1)}_{-}\underbrace{(4x-5)}_{-}}}{1-x}$

$= \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{5-4x}}{\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{1-x}} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\sqrt{5-4x}}{\sqrt{1-x}} = \text{"}\dfrac{1}{0^+}\text{"} = +\infty$

c) $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt{4x^2-9x+5}}{1-x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2|x|\sqrt{1-\frac{9}{x}+\frac{5}{x^2}}}{-x+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\pm 2x}{-x} = \mp 2$

Question 2

(1) C.E. : $2x^2-2x-4 \neq 0 \Leftrightarrow 2(x-2)(x+1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$ et $x \neq -1$

$D_f = D_c f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$

(2) Racines :

$$\begin{aligned} f(x)=0 \quad & \Leftrightarrow x^3-2x^2+3x=0 \Leftrightarrow x(x^2-2x+3)=0 \\ & \Leftrightarrow x=0 \text{ ou } \underbrace{x^2-2x+3}_{\Delta=4-12<0}=0 \\ & \Leftrightarrow x=0 \end{aligned}$$

(3) $\lim_{x\to -1^\pm} f(x) = \lim_{x\to -1^\pm} \frac{x(x^2-2x+3)}{2(x-2)(x+1)} = \frac{-1\cdot 6}{2\cdot(-3)\cdot 0^\pm} = \pm\infty$

Donc AV : $x=-1$

$\lim_{x\to 2^\pm} f(x) = \lim_{x\to -1^\pm} \frac{x(x^2-2x+3)}{2(x-2)(x+1)} = \frac{2\cdot 3}{2\cdot 0^\pm \cdot 3} = \pm\infty$

Donc : AV : $x=2$

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{2x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{2} = \pm\infty$

Donc pas d'AH.

Recherche d'une AO :

La division euclidienne de x^3-2x^2+3x par $2x^2-2x-4$ donne :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{2}-\frac{1}{2}+\frac{4x-2}{2(x-2)(x+1)} \\ &= \frac{x}{2}-\frac{1}{2}+\frac{2x-1}{(x-2)(x+1)} \end{aligned}$$

Donc :

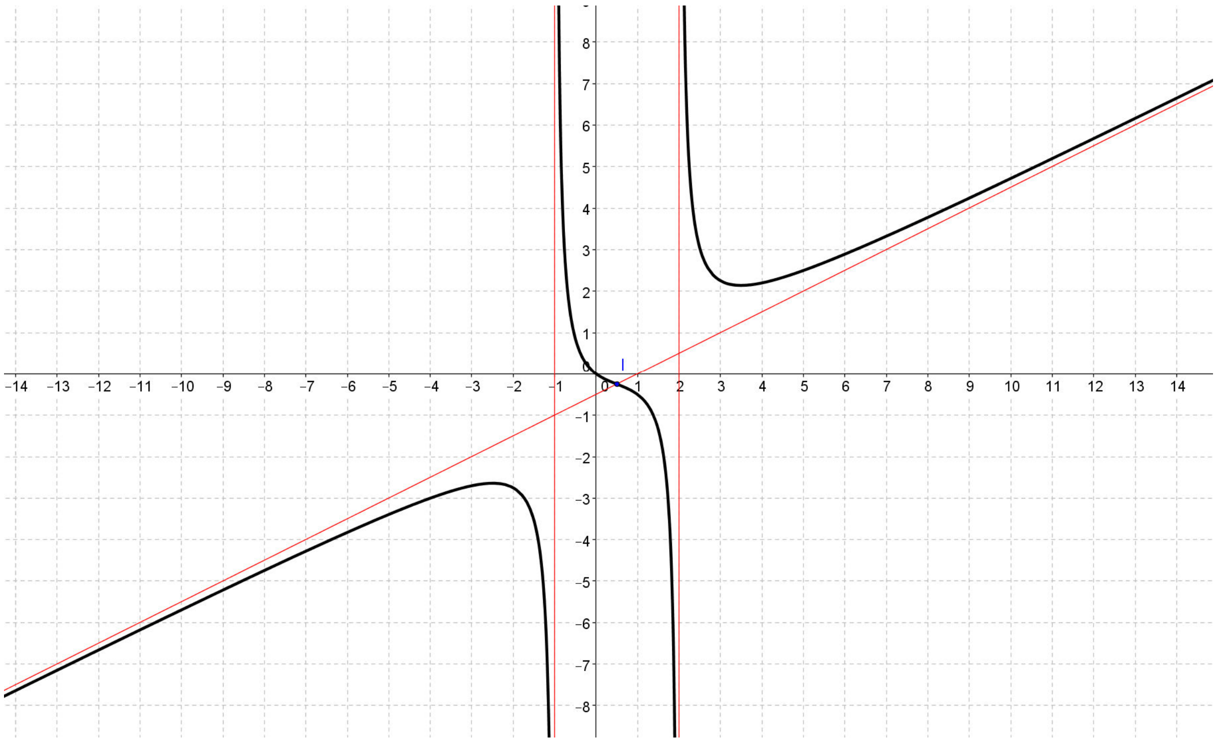
$$\begin{aligned} & \lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\right)\right] \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x-1}{(x-2)(x+1)} \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{x} = 0^\pm \end{aligned}$$

$\Rightarrow \mathcal{G}_f$ admet une AO : $y = \frac{x}{2}-\frac{1}{2}$

(4) $\delta(x) = f(x) - \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{2x-1}{(x-2)(x+1)}$

x	$-\infty$	-1		$1/2$		2	$+\infty$
$2x-1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$(x-2)(x+1)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$\delta(x)$	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$
Position de $\mathcal{G}_f$ p.r. à AO	AO/$\mathcal{G}_f$	$\|\|$	$\mathcal{G}_f$/AO	PI $\left(\frac{1}{2} ; -\frac{1}{4}\right)$	AO/$\mathcal{G}_f$	$\|\|$	$\mathcal{G}_f$/AO

(5) Graphe de f :



Question 3

Remarquons tout d'abord que $\mathcal{D}_g =]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$, donc la question a un sens.

Remarquons ensuite que

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{\cancel{x}\,|x| \overbrace{\sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}}^{\to 1}}{\cancel{x} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{x}\right)}_{\to 1}} = \lim_{x \to -\infty} |x| = +\infty ,$$

donc $\mathcal{G}_f$ n'admet pas d'asymptote horizontale à gauche (calcul pas demandé !)

Maintenant :

- $$\lim_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x}\,|x|\overbrace{\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}^{\to 1}}{x^{\cancel{2}}\underbrace{\left(1+\frac{1}{x}\right)}_{\to 1}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|}{x} = -1 \quad \text{car } |x| = -x \text{ si } x \le 0$$

- $$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} g(x)+x &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x+1}\left(\sqrt{x^2-4}+x+1\right)\\
&= \lim_{x\to-\infty} \underbrace{\frac{x}{x+1}}_{\to 1} \frac{\left(\sqrt{x^2-4}+x+1\right)\left(\sqrt{x^2-4}-x-1\right)}{\left(\sqrt{x^2-4}-x-1\right)}\\
&= \lim_{x\to-\infty} \underbrace{\frac{x}{x+1}}_{\to 1} \frac{x^2-4-(x+1)^2}{\left(|x|\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}-x-1\right)}\\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-4-x^2-2x-1}{\left(-x\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}-x-1\right)}\\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{-2x-5}{-x\underbrace{\left(\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}+1-\frac{1}{x}\right)}_{\to 2}}\\
&= 1
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{G}_f$ admet l'AOG : $y = -x + 1$

G. Lorang