Nom : .... Prénom : ....

2B Devoir de mathématiques II,1 24.01.2013

Durée : 110′ ***Calculatrice non autorisée***

Je tiens compte de la propreté de la copie !

Question 1 — 10 (=4+6) points

(1) ***Compléter*** et ***démontrer*** que : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos\alpha}{\alpha^2}=\ldots\ldots$

(2) ***Calculer*** : a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos(x)}{2x-\pi}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(3x)-1}{x^2}$

Question 2 — 12 (3+9) points

On considère la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}$.

(1) Déterminer les domaines de définition et de continuité de f en justifiant votre réponse.

(2) Calculer la limite de f en $+\infty$, puis montrer que $\mathcal{G}_f$ admet une A.O.D. dont on déterminera une équation cartésienne.

Question 3 — 12 (=6+6) points

(1) ***Montrer*** que si f est une fonction ***dérivable*** en un réel $a\in\operatorname{dom} f$, alors f est aussi ***continue*** en a.

(2) ***Compléter*** et ***démontrer*** : Si u et v sont deux fonctions ***dérivables*** sur un intervalle I, alors alors $u\cdot v$ est aussi dérivable sur I et :

$$(\forall a\in I)\quad (uv)'(a)=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Question 4 — 12 (=7+5) points

(1) Soit la fonction $f: x\mapsto x\sqrt{x}$. Calculer $f'(a)$ à l'aide de la ***définition*** et préciser le domaine de la fonction dérivée f'. Etablir une équation cartésienne de la tangente t_1 au graphe de f au point d'abscisse 1 et tracer $\mathcal{G}_f$ et t_1 au voisinage de ce point.

(2) Même question lorsque $f(x)=\dfrac{1}{2x^2}$.

Tournez s.v.p.

Question 5 — 14 (=2+3+2+3+4) points

Calculer à l'aide des ***formules établies dans le cours*** les dérivées des fonctions suivantes. On demande aussi à chaque fois les ***domaines*** de ***définition*** et de ***dérivabilité*** de la fonction.

(1) $f\left(x\right)=8x^4-3x^2+\dfrac{1}{3x}-\dfrac{5}{7x^4}$

(2) $g\left(x\right)=\dfrac{x^2-3x+7}{2\sqrt{x}}$

(3) $h\left(x\right)=\dfrac{3}{x^2-2}$

(4) $k\left(x\right)=\dfrac{\sqrt[4]{x^3}-2x^2\sqrt{x}}{5}$

(5) $l\left(x\right)=\dfrac{x-5}{\sqrt{x}-3}$

Bonus (3 points)

En quel(s) point(s) le graphe de la fonction l de la question 5 admet-il une tangente horizontale ?

G. Lorang

Formules trigonométriques

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x} \qquad \sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x} \qquad 1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\sin(\pi - x) = \sin x \qquad \sin(\pi + x) = -\sin x \qquad \sin(-x) = -\sin x$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x \qquad \cos(\pi + x) = -\cos x \qquad \cos(-x) = \cos x$$

$$\tan(\pi - x) = -\tan x \qquad \tan(\pi + x) = \tan x \qquad \tan(-x) = -\tan x$$

$$\sin\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \qquad \sin\left(\tfrac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$

$$\cos\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \qquad \cos\left(\tfrac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$$

$$\tan\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) = \cot x \qquad \tan\left(\tfrac{\pi}{2} + x\right) = -\cot x$$

$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x \sin y$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

$$\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x \qquad \cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1+\cos 2x)$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \qquad \sin^2 x = \tfrac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

$$\sin 2x = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x} \qquad \cos 2x = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x} \qquad \tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x \qquad \cos 3x = -3\cos x + 4\cos^3 x$$

$$\sin p + \sin q = 2\sin\tfrac{p+q}{2}\cos\tfrac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2\sin\tfrac{p-q}{2}\cos\tfrac{p+q}{2}$$

$$\cos p + \cos q = 2\cos\tfrac{p+q}{2}\cos\tfrac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2\sin\tfrac{p+q}{2}\sin\tfrac{p-q}{2}$$

$$\tan p + \tan q = \frac{\sin(p+q)}{\cos p \cos q}$$

$$\tan p - \tan q = \frac{\sin(p-q)}{\cos p \cos q}$$

$$\sin x \cos y = \tfrac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

$$\cos x \cos y = \tfrac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\sin x \sin y = \tfrac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$$