Nom : .... Prénom : ....

2B Corrigé du devoir II,1 24.01.2013

Question 1

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\alpha}{\alpha^2}=\frac{1}{2}$ (cf. manuel)

(2) a) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(x)}{2x-\pi}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(x)}{2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}$ (On pose $x-\frac{\pi}{2}=y\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+y$)

$=\lim_{y\to 0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+y\right)}{2y}=\lim_{y\to 0}\frac{-\sin y}{2y}=-\frac{1}{2}$

b) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos(3x)-1}{x^2}$ (On pose $3x=y\Leftrightarrow x=\frac{y}{3}$)

$=\lim_{y\to 0}\frac{9(\cos(y)-1)}{y^2}=\lim_{y\to 0}-\frac{9(1-\cos(y))}{y^2}=-\frac{9}{2}$

Question 2

(1) C.E. : a) $x\geq 0$ et

b) $x\geq -1$ et

c) $\sqrt{x}\neq\sqrt{x+1}\Leftrightarrow x\neq x+1\Leftrightarrow 0\neq 1$, toujours vrai.

Donc : $\mathcal{D}f=\mathcal{D}_c f=\mathbb{R}_+$

(2) Limite en $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x^2+x}}{x-(x+1)}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}-x-\sqrt{x^2+x}=\text{"}-\infty-\infty\text{"}=-\infty$$

Recherche d'une A.O.D :

a) $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x-\sqrt{x^2+x}}{x}$

$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left(-1-\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)}{\cancel{x}}=-2$

b) $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} f\left(x\right)+2x = \lim_{x\to+\infty} -x-\sqrt{x^2+x}+2x$

$$= \lim_{x\to+\infty} x-\sqrt{x^2+x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(x-\sqrt{x^2+x}\right)\left(x+\sqrt{x^2+x}\right)}{\left(x+\sqrt{x^2+x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-\left(x^2+x\right)}{x\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-\cancel{x}}{\cancel{x}\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)} = -\frac{1}{2}$$

Donc : $\mathcal{G}_f$ admet l'A.O.D. : $y=-2x-\dfrac{1}{2}$

Question 3

Voir manuel !

Question 4

(1) Remarquons que $\mathcal{D}f = \mathbb{R}_+$. Nous allons d'abord calculer la dérivée de f en un réel $a > 0$:

$\left(\forall a \in \mathbb{R}_+^*\right)$

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{x\sqrt{x} - a\sqrt{a}}{x - a}$$
$$= \lim_{x \to a} \frac{\left(x\sqrt{x} - a\sqrt{a}\right)\left(x\sqrt{x} + a\sqrt{a}\right)}{(x - a)\left(x\sqrt{x} + a\sqrt{a}\right)}$$
$$= \lim_{x \to a} \frac{x^3 - a^3}{(x - a)\left(x\sqrt{x} + a\sqrt{a}\right)}$$
$$= \lim_{x \to a} \frac{\cancel{(x - a)}\left(x^2 + ax + a^2\right)}{\cancel{(x - a)}\left(x\sqrt{x} + a\sqrt{a}\right)}$$
$$= \frac{3a^2}{2a\sqrt{a}} = \frac{3\sqrt{a}}{2}$$

Il reste à faire le calul de $f'(0)$:

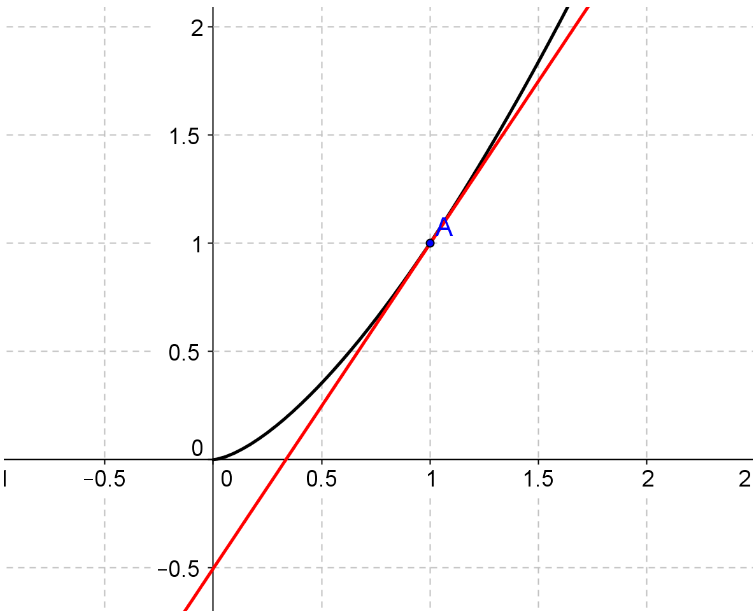
$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x}\sqrt{x}}{\cancel{x}} = \lim_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$$

Donc f est dérivable sur $\mathcal{D}f' = \mathbb{R}_+$ et :

$$\left(\forall a \in \mathbb{R}_+\right) \quad f'(a) = \frac{3}{2}\sqrt{a}$$

Equation de la tangente t_1 :

$$t_1 : y = \frac{3}{2}(x - 1) + 1 \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$$



(2) Comme $\mathcal{D}f = \mathbb{R}^*$, on va calculer :

$\left(\forall a \in \mathbb{R}^*\right)$

$$f'\left(a\right) = \lim_{x\to a} \frac{f\left(x\right) - f\left(a\right)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2a^2}}{x-a}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{\frac{a^2}{2x^2} - \frac{x^2}{2a^2}}{x-a}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{\left(a-x\right)\left(a+x\right)}{2a^2x^2\left(x-a\right)}$$

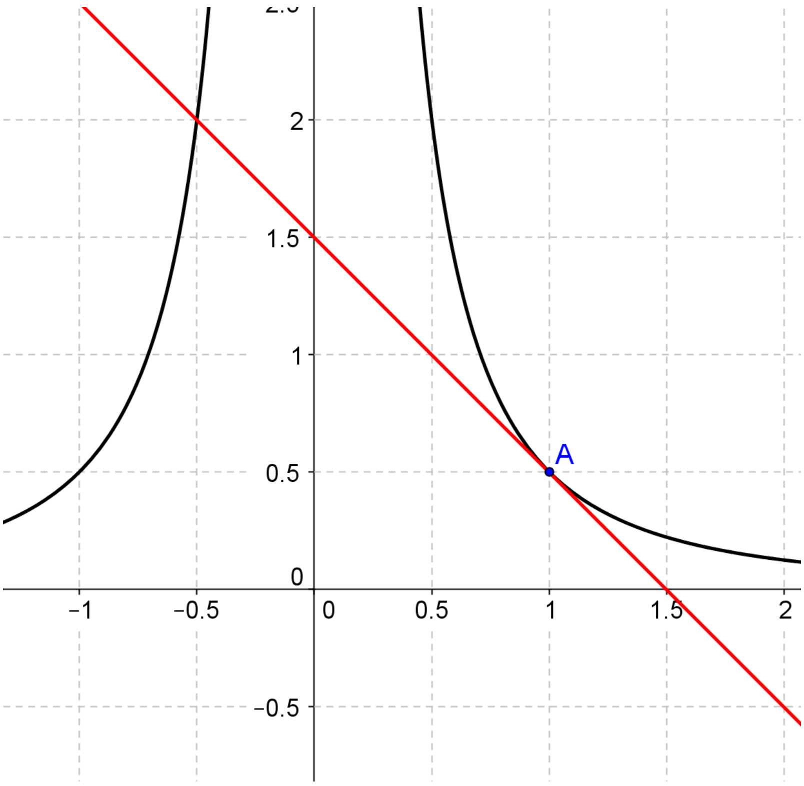
$$= \lim_{x\to a} \frac{-\cancel{\left(x-a\right)}\left(x+a\right)}{2a^2x^2\cancel{\left(x-a\right)}}$$

$$= \frac{-2a}{2a^4} = -\frac{1}{a^3}$$

Donc f est dérivable sur $\mathcal{D}f' = \mathbb{R}^*$ et $f' : x \mapsto -\frac{1}{x^3}$.

Equation de la tangente t_1 :

$$t_1 : y = -1\left(x-1\right) + \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = -x + \frac{3}{2}$$



Question 5

(1) $\mathcal{D}f = \mathbb{R}^* = \mathcal{D}f'$ et :

$$f(x) = 8x^4 - 3x^2 + \frac{1}{3x} - \frac{5}{7x^4}$$
$$= 8x^4 - 3x^2 + \frac{1}{3}x^{-1} - \frac{5}{7}x^{-4}$$

$$f'(x) = 32x^3 - 6x - \frac{1}{3x^2} + \frac{20}{7x^5}$$

(2) $\mathcal{D}g = \mathbb{R}_+^* = \mathcal{D}g'$ et :

$$g(x) = \frac{x^2 - 3x + 7}{2\sqrt{x}} = \frac{x\sqrt{x}}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{7}{2\sqrt{x}}$$
$$= \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{7}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$g'(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{7}{2}\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$$
$$= \frac{3}{4}\sqrt{x} - \frac{3}{4\sqrt{x}} - \frac{7}{4x\sqrt{x}}$$

(3) $\mathcal{D}h = \mathbb{R}\setminus\left\{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right\} = \mathcal{D}h'$

$$h'(x) = \frac{-6x}{\left(x^2 - 2\right)^2}$$

(4) $k(x) = \dfrac{\sqrt[4]{x^3} - 2x^2\sqrt{x}}{5} = \dfrac{1}{5}x^{\frac{3}{4}} - \dfrac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}$ $\qquad \mathcal{D}k = \mathbb{R}_+$

$$k'(x) = \frac{1}{5}\cdot\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}} - \frac{2}{5}\cdot\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$$
$$= \frac{3}{20\sqrt[4]{x}} - x\sqrt{x}$$

$\mathcal{D}k' = \mathbb{R}_+^*$

(5) $l(x) = \dfrac{x - 5}{\sqrt{x} - 3}$ $\qquad \mathcal{D}l = \mathbb{R}_+ \setminus \left\{9\right\}$

$$l'(x) = \frac{\sqrt{x} - 3 - (x - 5)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x} - 3\right)^2} = \frac{2x - 6\sqrt{x} - x + 5}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x} - 3\right)^2}$$
$$= \frac{x - 6\sqrt{x} + 5}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x} - 3\right)^2}$$

$\mathcal{D}l = \mathbb{R}_+^* \setminus \left\{9\right\}$

Bonus

La tangente en $M\left(x, l\left(x\right)\right)$ est horizontale

$$\Leftrightarrow l'\left(x\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow x - 6\sqrt{x} + 5 = 0$$

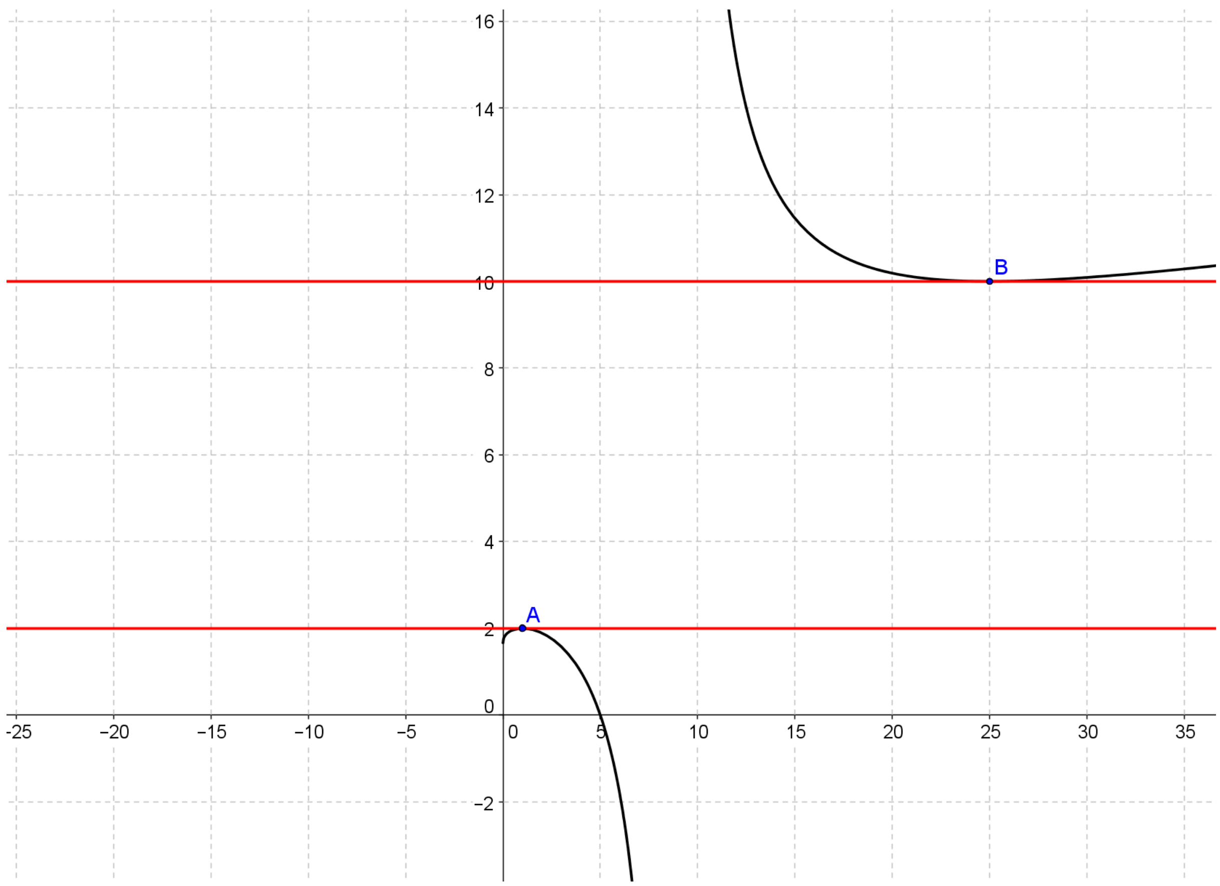
Posons : $y = \sqrt{x}$.

Alors l'équation est du 2e degré :

$$y^2 - 6y + 5 = 0 \Leftrightarrow y = 1 \text{ ou } y = 5$$

On revient à x : $\sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$ ou $\sqrt{x} = 5 \Leftrightarrow x = 25$

Donc les tangentes à $\mathcal{G}_f$ aux points $A\left(1,2\right)$ et $B\left(25,10\right)$ sont horizontales.



G. Lorang