Nom : .... Prénom : ....

2B Corrigé du devoir II,2 25.03.2014

Question 1

(1) a) La fonction f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ si $0 \leq a < b$, même si $a=0$! b) D'après le théorème de Lagrange il existe donc (au moins) un réel $c \in]a,b[$ tel que :

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

En effet :

$$\begin{aligned} & f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1}{2\sqrt{c}} = \frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{b-a} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1}{2\sqrt{c}} = \frac{\cancel{\sqrt{b}-\sqrt{a}}}{\cancel{\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)}\left(\sqrt{b}+\sqrt{a}\right)} \\ \Leftrightarrow\ & 2\sqrt{c} = \sqrt{a}+\sqrt{b} \\ \Leftrightarrow\ & c = \left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

(2) Soit la fonction $f : x \mapsto x^{\frac{3}{2}}$. On a : $f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$, pour $x \geq 0$. D'après un théorème du cours on sait que :

$$f(a+h) \approx f(a) + f'(a) \cdot h .$$

Donc :

$$\begin{aligned} & f(4,09) \approx f(4) + f'(4) \cdot 0,09 \\ \Leftrightarrow\ & \sqrt{4,09}^3 \approx 4^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2} 4^{\frac{1}{2}} \cdot 0,09 \\ \Leftrightarrow\ & \sqrt{4,09}^3 \approx 2^3 + \frac{3}{2} \cdot 2 \cdot 0,09 \quad . \\ \Leftrightarrow\ & \sqrt{4,09}^3 \approx 8 + 3 \cdot 0,09 \\ \Leftrightarrow\ & \sqrt{4,09}^3 \approx 8,27 \end{aligned}$$

Question 2

(1) $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x$

a) $\mathcal{D}f = \mathcal{D}f' = \mathbb{R}$.

b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^4}{4} = +\infty$

c)

$$\begin{aligned}(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f'(x) &= x^3 - x^2 - x + 1 \\ &= (x^3 - x^2) - (x-1) \\ &= x^2(x-1) - (x-1) \\ &= (x-1)(x^2-1) \\ &= (x-1)(x-1)(x+1) \\ &= (x-1)^2(x+1)\end{aligned}$$

On remarque que a) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 1$ et b) le signe de la dérivée dépend uniquement de $x+1$ car $(x-1)^2 \geq 0$.

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ $\searrow$	$-\dfrac{11}{12}$ (m)	$\nearrow$	$\dfrac{5}{12}$	$\nearrow$ $+\infty$

(2) $g(x) = \dfrac{2x-3}{(2-x)^2}$

a) $\mathcal{D}g = \mathcal{D}g' = \mathbb{R}\setminus\{2\}$.

b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2x}{x^2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2}{x} = 0$

$\lim\limits_{x\to 2} g(x) = "\dfrac{1}{0^+}" = +\infty$

c)

$$\begin{aligned}(\forall x \in \mathbb{R}) \quad g'(x) &= \frac{2(2-x)^2 - (2x-3)2(2-x)(-1)}{(2-x)^4} \\ &= \frac{2(2-x)\left[(2-x) + (2x-3)\right]}{(2-x)^4} \\ &= \frac{2(x-1)}{(2-x)^3}\end{aligned}$$

On remarque que a) $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ et b) le signe de la dérivée dépend de $x-1$ et de $2-x$, d'où le tableau de variation :

x	$-\infty$	1		2	$+\infty$
$x-1$	$-$	0	$+$		$+$
$2-x$	$+$		$+$	0	$-$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$
$g(x)$	$0 \searrow$	-1 (m)	$\nearrow +\infty$	$\Vert$	$+\infty \searrow 0$

Question 3

On donne la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{1-|x|} - x$.

(1) C.E. : $|x| \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$, donc $\mathcal{D}f = \mathcal{D}_c f = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.

(2) a) Si $x \geq 0$ et $x \neq 1$, alors $f(x) = \dfrac{x^2}{1-x} - x = \dfrac{x^2 - x(1-x)}{1-x} = \dfrac{2x^2 - x}{1-x}$

b) Si $x \leq 0$ et $x \neq -1$, alors $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x} - x = \dfrac{x^2 - x(1+x)}{1+x} = \dfrac{-x}{1+x}$

(3) $\lim\limits_{x \to -1^{\pm}} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^{\pm}} \dfrac{-x}{1+x} = \dfrac{1}{0^{\pm}} = \pm\infty \Rightarrow A.V. : x = -1$

$\lim\limits_{x \to 1^{\pm}} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^{\pm}} \dfrac{2x^2 - x}{1-x} = \dfrac{1}{0^{\mp}} = \mp\infty \Rightarrow A.V. : x = 1$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x}{1+x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x}{x} = -1 \Rightarrow A.H.G. : y = -1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 - x}{1-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2}{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} -2x = -\infty \Rightarrow$ pas d'$A.H.D.$

Recherche d'une $A.O.D.$:

La division euclidienne de $2x^2 - x$ par $1-x$ donne :

$$f(x) = -2x - 1 + \frac{1}{1-x}, \text{ si } x \geq 0$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) + 2x + 1\right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{1-x} = 0 \Rightarrow A.O.D. : y = -2x - 1$

(4) a) si $x > 0$ et $x \neq 1$ alors :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(4x-1)(1-x)+(2x^2-x)}{(1-x)^2} \\ &= \frac{4x-4x^2-1+x+2x^2-x}{(1-x)^2} \quad \text{et} \\ &= \frac{-2x^2+4x-1}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

b) si $x<0$ et $x \neq 1$:

$$f'(x) = \frac{-(1+x)-(-x)}{(1+x)^2} = \frac{-1}{(1+x)^2} < 0$$

c) $f'_d(0) \underset{(H)}{=} \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = -1$ et $f'_g(0) \underset{(H)}{=} \lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = -1$. Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = -1$. De plus : $\mathcal{D}f' = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.

(5) a) f n'admet pas d'extrémum sur $\mathbb{R}_-$ car si $x \leq 0$ et $x \neq -1$ alors $f'(x) < 0$.

b) Si $x \geq 0$ et $x \neq 1$ alors $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x^2+4x-1 = 0$ et $f'(x)$ a le signe de $-2x^2+4x-1$.

$$\Delta = 16-8 = 8\,,\ x_1 = \frac{-4+2\sqrt{2}}{-4} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}\,,\ x_2 = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$$

D'après le tableau du signe de $-2x^2+4x-1$, on déduit que :

f admet un minimum en $\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$ et un maximum en $\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$.