Nom : .... Prénom : ....

2B1 | Corrigé du devoir III,1 | 20.05.2014

Question 1

(1) $\operatorname{dom} f = \operatorname{dom}_c f = \mathbb{R}_+$.

(2) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0$ car f est continue en 0.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{4\sqrt{x}}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} \lim_{x \to +\infty} \frac{4}{\sqrt{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)} = 0 \text{, donc A.H. } y = 0$$

(3) a) $\left(\forall x \in \mathbb{R}_+^*\right)$ $f'(x) = \dfrac{\frac{2}{\sqrt{x}}(x+1) - 4\sqrt{x}}{(x+1)^2} = \dfrac{2x+2-4x}{\sqrt{x}(x+1)^2} = \dfrac{2(1-x)}{\sqrt{x}(x+1)^2}$

Dérivabilité en 0 :

$$\cancel{f'(0)} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{4}{\sqrt{x}(x+1)} = +\infty$$

Donc f n'est pas dérivable en 0 et $\mathcal{G}_f$ admet une demi-tangente verticale en $(0,0)$. $\operatorname{dom} f' = \mathbb{R}_+^*$.

b) $f'(x)$ a le signe de $1 - x$.

Tableau de variation :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$\vert\vert$ $+$	0	$-$
$f(x)$	0 (m) $\nearrow$	2 (M)	$\searrow$ 0

c) $t_0 : x = 0$ (et $y \geq 0$) car c'est une demi-tangente verticale.

$t_1 : y = 2$, car c'est une tangente horizontale.

$$\begin{aligned} t_2 : y &= f'(2)(x-2) + f(2) \\ \Leftrightarrow y &= \frac{-2}{9\sqrt{2}}(x-2) + \frac{4\sqrt{2}}{3} \\ \Leftrightarrow y &= -\frac{\sqrt{2}}{9}(x-2) + \frac{12\sqrt{2}}{9} \\ \Leftrightarrow y &= -\frac{\sqrt{2}}{9}x + \frac{14\sqrt{2}}{9} \end{aligned}$$

(4) dom $f'' = \mathbb{R}_+^*$.

$$f''(x) = \frac{-2\sqrt{x}(x+1)^2 - (2-2x)\left[\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+1)^2 + 2\sqrt{x}(x+1)\right]}{x(x+1)^4}$$

$$= \frac{-4x(x+1)^2 - (2-2x)\left[(x+1)^2 + 4x(x+1)\right]}{2x\sqrt{x}(x+1)^4}$$

$$= \frac{-4x(x+1) - 2(1-x)(x+1) - (2-2x)4x}{2x\sqrt{x}(x+1)^3}$$

$$= \frac{-4x^2 - 4x - 2(1-x^2) - 8x + 8x^2}{2x\sqrt{x}(x+1)^3}$$

$$= \frac{6x^2 - 12x - 2}{2x\sqrt{x}(x+1)^3}$$

$$= \frac{3x^2 - 6x - 1}{x\sqrt{x}(x+1)^3}$$

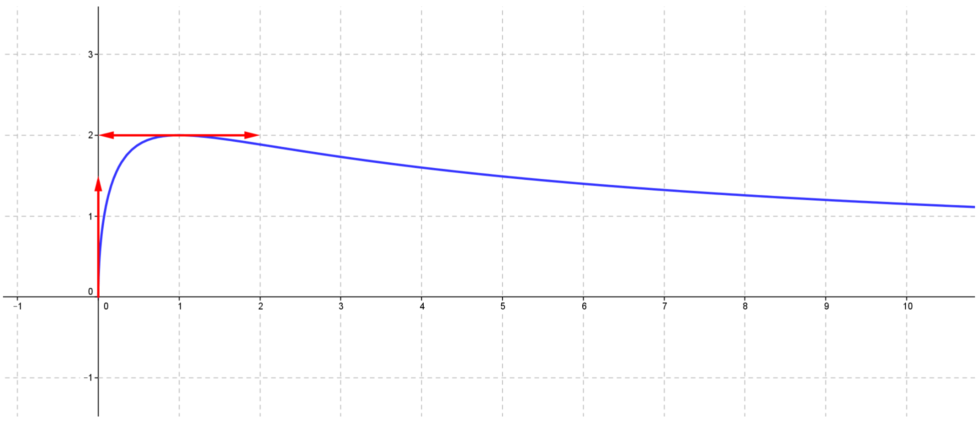
$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{48}}{6} = \frac{6 \pm 4\sqrt{3}}{6} = \frac{3 \pm 2\sqrt{3}}{3}$$

La solution $\frac{3-2\sqrt{3}}{3}$ est à écarter car elle est négative. Donc on retient seulement la solution $x_1 = \frac{3+2\sqrt{3}}{3} = 1 + \frac{2}{3}\sqrt{3} = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 2{,}15$.

x	0	x_1	$+\infty$
$f''(x)$	$\Vert$ $-$	0	$+$
$\mathcal{G}_f$		PI	

Point d'inflexion : PI $\approx$ (x_1 , 1,86)

(5) Représentation graphique :



Question 2

(1) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^3+5x^2+3x-9}{2x^3+11x^2+12x-9}$

$$\underset{(H)}{\overset{"\frac{0}{0}"}{=}} \lim_{x\to -3} \frac{3x^2+10x+3}{6x^2+22x+12} \underset{(H)}{\overset{"\frac{0}{0}"}{=}} \lim_{x\to -3} \frac{6x+10}{12x+22} = \frac{-8}{-14} = \frac{4}{7}$$

(2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x^3}$

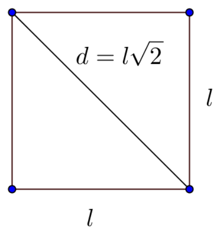
$$\underset{(H)}{\overset{"\frac{0}{0}"}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{1+\tan^2 x - \cos x}{3x^2}$$

$$\underset{(H)}{\overset{"\frac{\infty}{\infty}"}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{2\tan x\left(1+\tan^2 x\right)+\sin x}{6x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\tan x + 2\tan^3 x + \sin x}{6x}$$

$$\underset{(H)}{\overset{"\frac{0}{0}"}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{2\left(1+\tan^2 x\right)}^{\to 2} + \overbrace{6\tan^2 x\left(1+\tan^2 x\right)}^{\to 0} + \overbrace{\cos x}^{\to 1}}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Question 3



(1) A l'aide du théorème de Pythagore, on démontre que : dans un carré de côté l, la diagonale d mesure $l\sqrt{2}$. En effet : $l^2+l^2=d^2 \Leftrightarrow 2l^2=d^2 \Leftrightarrow d=l\sqrt{2}$. On en déduit :

a) Comme le carré $ABCD$ a comme côté 1, sa diagonale mesure donc $AC=\sqrt{2}$

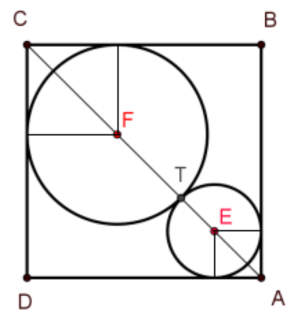
b) Comme le rayon du disque $\mathcal{D}_1$ est r, on a : $EA = r\sqrt{2}$.

c) Comme le rayon du disque $\mathcal{D}_2$ est r', on a de même : $FC = r'\sqrt{2}$.

(Considérer les carrés de diagonales $[EA]$ et $[FC]$ de la figure respectivement.)

Or :

$$AC = AE + r + r' + FC$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{2} = r\sqrt{2} + r + r' + r'\sqrt{2}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{2} = r\left(\sqrt{2}+1\right) + r'\left(\sqrt{2}+1\right)$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{2} = \left(\sqrt{2}+1\right)\left(r+r'\right)$$
$$\Leftrightarrow r + r' = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)}{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)} = \frac{2-\sqrt{2}}{1}$$
$$\Leftrightarrow r + r' = 2 - \sqrt{2}$$



(2) $f(r) = \pi r^2 + \pi r'^2 = \pi r^2 + \pi\left(2-\sqrt{2}-r\right)^2$

$$f'(r) = 2\pi r + 2\pi\left(2-\sqrt{2}-r\right)\cdot(-1)$$
$$= 2\pi\left(r-2+\sqrt{2}+r\right)$$
$$= 2\pi\left(2r-2+\sqrt{2}\right)$$

Donc :

$$f'(r) = 0 \Leftrightarrow 2r-2+\sqrt{2} = 0$$
$$\Leftrightarrow r = 1-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Pour voir que f admet un minimum en ce point, on étudie le signe de $f'(r)$:

r	$\frac{3}{2}-\sqrt{2}$	$1-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$f'(r)$	$-$	0	$+$
$f(r)$	$\frac{3\pi\left(3-2\sqrt{2}\right)}{2}$ ↘	$\pi\left(3-2\sqrt{2}\right)$ (m)	↗ $\frac{3\pi\left(3-2\sqrt{2}\right)}{2}$

$$f\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \pi\left(2-\sqrt{2}-1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$
$$= \pi\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \pi\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$
$$= \pi\left(1-\sqrt{2}+\frac{1}{2}+1-\sqrt{2}+\frac{1}{2}\right)$$
$$= \pi\left(3-2\sqrt{2}\right)$$

Bonus :

La fonction f atteint son maximum lorsque $\mathcal{D}_1$ ou $\mathcal{D}_2$ est tangent aux 4 côtés du carré, c.-à-d. lorsque $r = \frac{1}{2}$ et $r' = 2-\sqrt{2}-\frac{1}{2} = \frac{3}{2}-\sqrt{2}$, ou inversément.

La valeur du maximum est :

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \pi\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \pi\left(\frac{3}{2}-\sqrt{2}\right)^2 = \pi\left(\frac{1}{4}+\frac{9}{4}-3\sqrt{2}+2\right)$$
$$= \pi\left(\frac{5}{2}+2-3\sqrt{2}\right) = \pi\left(\frac{9}{2}-3\sqrt{2}\right) = \frac{3\pi\left(3-2\sqrt{2}\right)}{2}$$