

Question 1

Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{\sin x}{1 + \cos x}$.

(1) C.E. : $1 + \cos x \neq 0 \Leftrightarrow \cos x \neq -1 \Leftrightarrow x \neq \pi + k \cdot 2\pi$

$$\mathcal{D}f = \mathcal{D}_c f = \mathbb{R} \setminus \{(2k + 1)\pi / k \in \mathbb{Z}\}.$$

(2) a) $f(-x) = \frac{\sin(-x)}{1 + \cos(-x)} = \frac{-\sin x}{1 + \cos x} = -f(x)$. Donc f est impaire.

b) $f(x + 2\pi) = \frac{\sin(x + 2\pi)}{1 + \cos(x + 2\pi)} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = f(x)$. Donc f est périodique de

période 2π .

c) Il suffit donc d'étudier la fonction sur un intervalle de longueur 2π , par exemple $[-\pi, \pi]$. Mais comme f est impaire, le graphe de f est symétrique par rapport à O . Donc l'intervalle d'étude peut être réduit à $D = [0, \pi]$.

(3) $\lim_{x \rightarrow \pi^\pm} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^\pm} \frac{\sin x}{1 + \cos x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow \pi^\pm} \frac{\cos x}{-\sin x} = \lim_{x \rightarrow \pi^\pm} -\cot x = \mp \infty$

Donc AV : $x = \pi$. Comme f est périodique de période 2π , \mathcal{G}_f admet des AV en $x = (2k + 1)\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ n'existe pas : donc il n'y a pas d'asymptote horizontale, ni oblique.

(4) $\mathcal{D}f' = \mathbb{R} \setminus \{(2k + 1)\pi / k \in \mathbb{Z}\}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\cos x(1 + \cos x) - \sin x(-\sin x)}{(1 + \cos x)^2} \\ &= \frac{\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{(1 + \cos x)^2} \\ &= \frac{1 + \cos x}{(1 + \cos x)^2} \\ &= \frac{1}{1 + \cos x} \end{aligned}$$

On remarque que si $x \in \mathcal{D}f'$, alors $f'(x) > 0$.



x	$-\pi$	0	π	
$f'(x)$		+		
$f(x)$	$-\infty$			$+\infty$

$$(5) \quad \mathcal{D}f'' = \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi / k \in \mathbb{Z}\}$$

$$f''(x) = \frac{\sin x}{(1 + \cos x)^2}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

(Il faut remarquer que les multiples impairs de π ne sont pas des racines !)

x	$-\pi$	0	π
$f'(x)$	 - 	0	+
\mathcal{G}_f	  	PI	

L'origine $(0,0)$ est un point d'inflexion.

En tenant compte de la périodicité, tous les points d'inflexion du graphe de f sont les points $(2k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Question 2

(1) a) La fonction Arcsin est la bijection réciproque de la fonction

$$s : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$$

$$x \mapsto \sin x$$

b) $(\forall x \in [-1, 1])(\forall y \in [0, \pi]) \quad y = \text{Arccos } x \Leftrightarrow x = \cos y$

c) $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \tan(\text{Arctan } x) = x$

d) $(\forall x \in [-1, 1]) \quad \text{Arccos}(-x) = \pi - \text{Arccos } x$

e) $(\forall x \in [-1, 1]) \quad \cos(\text{Arcsin } x) = \sqrt{1 - x^2}$

(2) Voir cours.

Question 3

(1) C.E. :

$$-1 \leq 4x^2 - 4x \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 4x + 1 \geq 0 & (1) \\ 4x^2 - 4x - 1 \leq 0 & (2) \end{cases}$$

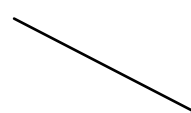
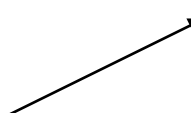
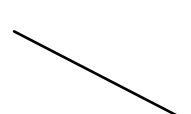

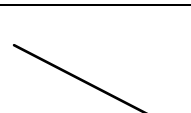
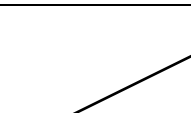
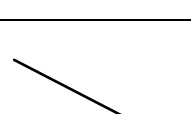

(1) : $(2x - 1)^2 \geq 0$, toujours vrai

(2) : $\Delta = 16 + 16 = 32$, $x_1 = \frac{4 - 4\sqrt{2}}{8} = \frac{1 - \sqrt{2}}{2}$, $x_2 = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$

$$\text{Donc : } 4x^2 - 4x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \sqrt{2}}{2} \leq x \leq \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$$

$$A = \mathcal{D}g = \left[\frac{1 - \sqrt{2}}{2}, \frac{1 + \sqrt{2}}{2} \right]$$

Pour déterminer l'ensemble des images, on peut par exemple passer par des tableaux de variation :

x	$\frac{1 - \sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1 + \sqrt{2}}{2}$
$4x^2 - 4x$	1 	-1	 1
$\text{Arcsin}(4x^2 - 4x)$	$\frac{\pi}{2}$ 	$-\frac{\pi}{2}$	 $\frac{\pi}{2}$
$\text{Arcsin}(4x^2 - 4x) - \frac{\pi}{2}$	0 	$-\pi$	 0
$g(x)$	0 	-5π	 0

$$\text{Donc : } \text{Im } g = [-5\pi, 0]$$

(2) Racines :

$$\begin{aligned} g(x) = 0 &\Leftrightarrow \text{Arcsin}(4x^2 - 4x) = \frac{\pi}{2} \\ &\Leftrightarrow 4x^2 - 4x = 1 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

g n'est pas une bijection de A vers B car par exemple 0 admet 2 antécédents distincts. D'après le TV de la question précédente, on peut aussi affirmer que tout réel y de $\text{Im } g$, sauf -5π , admet exactement 2 antécédents.

Question 4

(1) C.E. : $4 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$ et

$$-1 \leq \frac{x}{2} \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$$

$$\text{Donc } \mathcal{D}h = [-2, 2].$$

- (2) h est certainement dérivable en tout réel x de $] - 2, 2[$:
 $(\forall x \in] - 2, 2[)$

$$\begin{aligned}
 h'(x) &= \sqrt{4-x^2} + x \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} + 4 \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} \\
 &= \sqrt{4-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} + \frac{4}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} \\
 &= \sqrt{4-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} + \frac{4}{\sqrt{4-x^2}} \\
 &= \frac{4-x^2-x^2+4}{\sqrt{4-x^2}} \\
 &= \frac{2(4-x^2)}{\sqrt{4-x^2}} \\
 &= 2\sqrt{4-x^2}
 \end{aligned}$$

Donc $a = 2$.

Etudions la dérivabilité en 2 et en -2 :

$$h'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{h(x) - h(2)}{x - 2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{(H) x \rightarrow 2} h'(x) = 0$$

et de même $h'(-2) = 0$

Donc :

$$\mathcal{D}h' = [-2, 2] \text{ et } (\forall x \in [-2, 2]) \quad h'(x) = 2\sqrt{4-x^2}$$