Nom : .... Prénom : ....

2B1 Corrigé du devoir III,2 24.06.2014

Question 1

Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{1+\cos x}$.

(1) C.E. : $1+\cos x \neq 0 \Leftrightarrow \cos x \neq -1 \Leftrightarrow x \neq \pi + k\cdot 2\pi$

$\mathcal{D}f = \mathcal{D}_c f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \left(2k+1\right)\pi \;/\; k \in \mathbb{Z} \right\}$.

(2) a) $f\left(-x\right) = \dfrac{\sin\left(-x\right)}{1+\cos\left(-x\right)} = \dfrac{-\sin x}{1+\cos x} = -f\left(x\right)$. Donc f est impaire.

b) $f\left(x+2\pi\right) = \dfrac{\sin\left(x+2\pi\right)}{1+\cos\left(x+2\pi\right)} = \dfrac{\sin x}{1+\cos x} = f\left(x\right)$. Donc f est périodique de période 2π.

c) Il suffit donc d'étudier la fonction sur un intervalle de longueur 2π, par exemple $[-\pi,\pi]$. Mais comme f est impaire, le graphe de f est symétrique par rapport à O. Donc l'intervalle d'étude peut être réduit à $D=[0,\pi]$.

(3) $\lim\limits_{x\to\pi^\pm} f\left(x\right) = \lim\limits_{x\to\pi^\pm} \dfrac{\sin x}{1+\cos x} \underset{(H)}{\overset{"\frac{0}{0}"}{=}} \lim\limits_{x\to\pi^\pm} \dfrac{\cos x}{-\sin x} = \lim\limits_{x\to\pi^\pm} -\cot x = \mp\infty$

Donc AV : $x=\pi$. Comme f est périodique de péridode 2π, $\mathcal{G}_f$ admet des AV en $x=\left(2k+1\right)\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f\left(x\right)$ n'existe pas : donc il n'y a pas d'asymptote horizontale, ni oblique.

(4) $\mathcal{D}f' = \mathbb{R} \setminus \left\{ \left(2k+1\right)\pi \;/\; k \in \mathbb{Z} \right\}$

$$\begin{aligned} f'\left(x\right) &= \frac{\cos x\left(1+\cos x\right) - \sin x\left(-\sin x\right)}{\left(1+\cos x\right)^2} \\ &= \frac{\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{\left(1+\cos x\right)^2} \\ &= \frac{1+\cos x}{\left(1+\cos x\right)^2} \\ &= \frac{1}{1+\cos x} \end{aligned}$$

On remarque que si $x \in \mathcal{D}f'$, alors $f'\left(x\right) > 0$.

x	$-\pi$		0		π
$f'\left(x\right)$	$\Vert$	+		+	$\Vert$
$f\left(x\right)$	$-\infty$	$\nearrow$			$+\infty$

(5) $\mathcal{D}f'' = \mathbb{R} \setminus \left\{ \left(2k+1\right)\pi \;/\; k \in \mathbb{Z} \right\}$

$$f''\left(x\right) = \frac{\sin x}{\left(1+\cos x\right)^2}$$

$f''\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = 2k\pi\,,\; k \in \mathbb{Z}\,.$

(Il faut remarquer que les multiples impairs de π ne sont pas des racines !)

x	$-\pi$	0	π
$f'\left(x\right)$	$\vert\vert$ $-$	0	$+$ $\vert\vert$
$\mathcal{G}_f$	$\vert\vert$	PI	$\vert\vert$

L'origine (0,0) est un point d'inflexion.

En tenant compte de la périodicité, tous les points d'inflexion du graphe de f sont les points $\left(2k\pi, 0\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Question 2

(1) a) La fonction Arcsin est la bijection réciproque de la fonction

$$\begin{aligned} s : [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] &\to [-1,1] \\ x &\mapsto \sin x \end{aligned}$$

b) $\left(\forall x \in [-1,1]\right)\left(\forall y \in [0,\pi]\right) \quad y = \operatorname{Arccos} x \Leftrightarrow x = \cos y$

c) $\left(\forall x \in \mathbb{R}\right) \quad \tan\left(\operatorname{Arctan} x\right) = x$

d) $\left(\forall x \in [-1,1]\right) \quad \operatorname{Arccos}\left(-x\right) = \pi - \operatorname{Arccos} x$

e) $\left(\forall x \in [-1,1]\right) \quad \cos\left(\operatorname{Arcsin} x\right) = \sqrt{1-x^2}$

(2) Voir cours.

Question 3

(1) C.E. :

$-1 \leq 4x^2 - 4x \leq 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 4x + 1 \geq 0 & (1) \\ 4x^2 - 4x - 1 \leq 0 & (2) \end{cases}$$

(1) : $\left(2x-1\right)^2 \geq 0$, toujours vrai

(2) : $\Delta = 16 + 16 = 32$, $x_1 = \dfrac{4 - 4\sqrt{2}}{8} = \dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$, $x_2 = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$

Donc : $4x^2 - 4x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{1-\sqrt{2}}{2} \leq x \leq \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$

$A = \mathcal{D}g = \left[\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}, \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}\right]$

Pour déterminer l'ensemble des images, on peut par exemple passer par des tableaux de variation :

x	$\frac{1-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1+\sqrt{2}}{2}$
$4x^2 - 4x$	$1 \searrow$	-1	$\nearrow 1$
$\operatorname{Arcsin}\left(4x^2 - 4x\right)$	$\frac{\pi}{2} \searrow$	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow \frac{\pi}{2}$
$\operatorname{Arcsin}\left(4x^2 - 4x\right) - \frac{\pi}{2}$	$0 \searrow$	$-\pi$	$\nearrow 0$
$g\left(x\right)$	$0 \searrow$	-5π	$\nearrow 0$

Donc : $\operatorname{Im} g = [-5\pi, 0]$

(2) Racines :

$$\begin{aligned} & g\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Arcsin}\left(4x^2 - 4x\right) = \tfrac{\pi}{2} \\ & \Leftrightarrow 4x^2 - 4x = 1 \\ & \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

g n'est pas une bijection de A vers B car par exemple 0 admet 2 antécédents distincts. D'après le TV de la question précédente, on peut aussi affirmer que tout réel y de $\operatorname{Im} g$, sauf -5π , admet exactement 2 antécédents.

Question 4

(1) C.E. : $4 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$ et

$-1 \leq \dfrac{x}{2} \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$

Donc $\mathcal{D}h = [-2, 2]$.

(2) h est certainement dérivable en tout réel x de $]-2,2[$:

$\left(\forall x \in]-2,2[\right)$

$$\begin{aligned} h'\left(x\right) &= \sqrt{4-x^2} + x\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} + 4\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} \\ &= \sqrt{4-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} + \frac{4}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} \\ &= \sqrt{4-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} + \frac{4}{\sqrt{4-x^2}} \\ &= \frac{4-x^2-x^2+4}{\sqrt{4-x^2}} \\ &= \frac{2\left(4-x^2\right)}{\sqrt{4-x^2}} \\ &= 2\sqrt{4-x^2} \end{aligned}$$

Donc $a = 2$.

Etudions la dérivabilité en 2 et en -2 :

$$h'\left(2\right) = \lim_{x\to 2}\frac{h\left(x\right)-h\left(2\right)}{x-2} \underset{(H)}{\overset{"\frac{0}{0}"}{=}} \lim_{x\to 2} h'\left(x\right) = 0$$

et de même $h'\left(-2\right) = 0$

Donc :

$$\mathcal{D}h' = [-2,2] \text{ et } \left(\forall x \in [-2,2]\right) \qquad h'\left(x\right) = 2\sqrt{4-x^2}$$