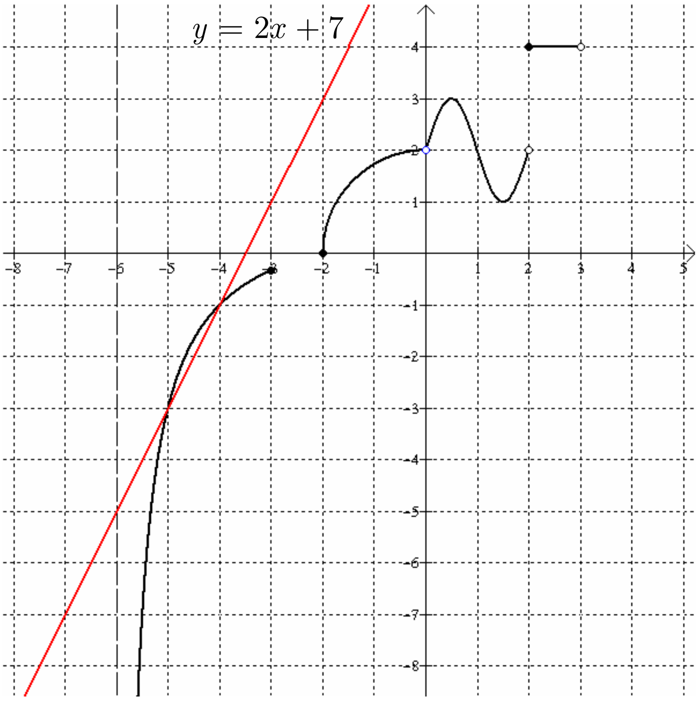
Question 1



A.

(1) $\operatorname{dom} f =]-6,-3] \cup [-2,0[\cup]0,3[$ et $\operatorname{im} f =]-\infty, -\frac{1}{3}] \cup [0,3] \cup \{4\}$.

(2) $f(-4) = -1$; $f(2) = 4$; $f(-2) = 0$.

(3) Les antécédents de 1,5 sont approximativement –1,3, 1,2 et 1,8. 3,7 n'a pas d'antécédent. Les antécédents de 4 sont tous les réels de $[2,3[$.

(4) f a une racine unique -2.

(5) $f(x) \leq 2 \Leftrightarrow x \in]-6,-3] \cup [-2,0[\cup [1,2[$.

(6) On trace la droite d'équation $y = 2x + 7$. On voit alors que $f(x) = 2x + 7$ $\Leftrightarrow x = -4$ ou $x = -5$.

B.

a	–6	–5	–3	–2	0	2	3,1
$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$	/	–3	$-\frac{1}{3}$	/	2	2	/
$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$	$-\infty$	–3	/	0	2	4	/
$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$-\infty$	–3	$-\frac{1}{3}$	0	2	/	/

Question 2

Soit $f : x \mapsto \sqrt{x-1}$ et $g : x \mapsto \dfrac{1}{2x-3}$.

(1) $\operatorname{dom} f = [1,+\infty[$ et $\operatorname{dom} g = \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}\}$.

(2) $(f \circ g)(x)$ existe $\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{1}{2x-3} \geq 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2x-3} - \dfrac{2x-3}{2x-3} \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{2(2-x)}{2x-3} \geq 0 \end{cases}$

Cette inéquation se résout à l'aide d'un tableau du signe. On trouve $\operatorname{dom}(f \circ g) =]\frac{3}{2},2]$.

$$(f \circ g)(x) = \sqrt{\frac{1}{2x-3} - 1} = \sqrt{\frac{2(2-x)}{2x-3}}.$$

(3) $(g \circ f)(x)$ existe $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \sqrt{x-1} \neq \frac{3}{2} \Leftrightarrow x-1 \neq \frac{9}{4} \Leftrightarrow x \neq \frac{13}{4} \end{cases}$

Donc : $\operatorname{dom}(g \circ f) = [1,+\infty[\setminus \{\frac{13}{4}\}$.

$$(g \circ f)(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1} - 3}.$$

Question 3

(1) $\operatorname{dom} f = [-3,+\infty[$, $\operatorname{dom} g = \mathbb{R}$, $\operatorname{im} f = [-2,+\infty[$ et $\operatorname{im} g =]-\infty,3]$.

(2) f est injective. En effet, pour tout $y \geq -2$ et $x \geq -3$:

$$\begin{aligned} f(x) = y &\Leftrightarrow \sqrt{x+3} - 2 = y \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x+3} = \underbrace{y+2}_{\geq 0} \\ &\Leftrightarrow x+3 = (y+2)^2 \\ &\Leftrightarrow x = (y+2)^2 - 3 \end{aligned}$$

En d'autres termes, tout y admet au plus un antécédent par f.

g n'est pas injective. En effet, par exemple $f(x) = 0 \Leftrightarrow 8x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{3}{8}}$. 0 admet donc 2 antécédents par g.

(3) Comme g n'est pas injective, g^{-1} n'est pas une fonction. Par contre, f est injective, donc f^{-1} est une fonction. $\operatorname{dom} f^{-1} = \operatorname{im} f = [-2,+\infty[$ et $\operatorname{im} f^{-1} = \operatorname{dom} f = [-3,+\infty[$.

$$\begin{aligned} f^{-1} : [-2,+\infty[&\to [-3,+\infty[\\ x &\mapsto (x+2)^2 - 3 \end{aligned}$$

G. Lorang