2C1 — Devoir de mathématiques I,2 — 18.11.05

(1) $f(x)=\sqrt{x^2-3x+2}$

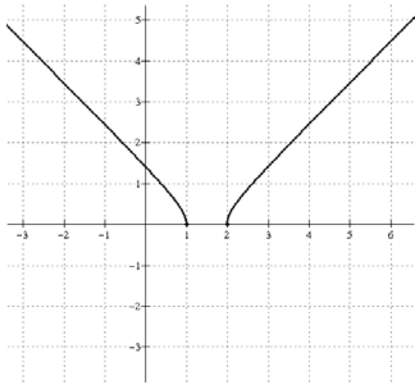
C.E. : $x^2-3x+2\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 2$ ou $x\leq 1$.

Donc : $\operatorname{dom} f =]-\infty,1]\cup[2,+\infty[$.

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=0=f(1)\Rightarrow f$ est continue en 1.

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=0=f(2)\Rightarrow f$ est continue en 2.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\text{"}\sqrt{+\infty}\text{"}=+\infty$.



(2) $g(x)=\dfrac{3}{4-x}$

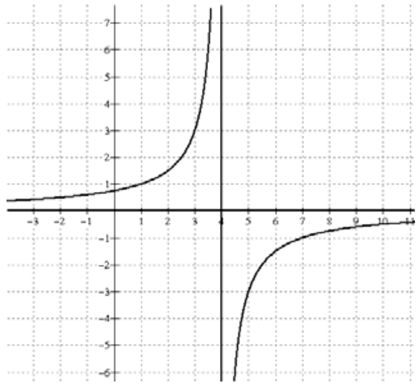
x		4	
$4-x$	+	0	-

$\operatorname{dom} g=\mathbb{R}\setminus\{4\}$

$\lim\limits_{x\to 4^{\pm}} g(x)=\text{"}\dfrac{3}{0^{\mp}}\text{"}=\mp\infty\Rightarrow$ A.V. : $x=4$

$\lim\limits_{x\to 4} g(x)$ n'existe pas.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)=\text{"}\dfrac{3}{\mp\infty}\text{"}=0^{\mp}\Rightarrow$ A.H. : $y=0$



(3) $\operatorname{dom} h=\mathbb{R}\setminus\{-3,\frac{1}{2}\}$

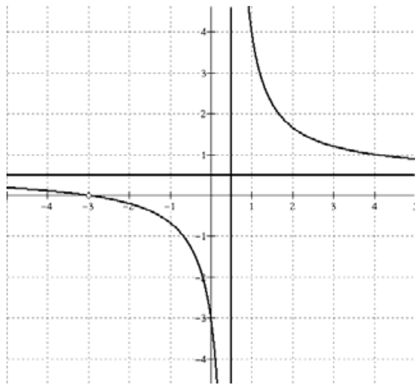
$h(x)=\dfrac{x^2+6x+9}{(2x-1)(x+3)}=\dfrac{(x+3)^2}{(2x-1)(x+3)}=\dfrac{x+3}{2x-1}$

$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^{\pm}} h(x)=\text{"}\dfrac{\frac{7}{2}}{0^{\pm}}\text{"}=\pm\infty\Rightarrow$ A.V. : $x=\frac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} h(x)$ n'existe pas.

$\lim\limits_{x\to -3} h(x)=\dfrac{0}{-7}=0\Rightarrow\mathcal{G}_h$ admet un trou en $(-3,0)$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x}{2x}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow$ A.H. : $y=\dfrac{1}{2}$.



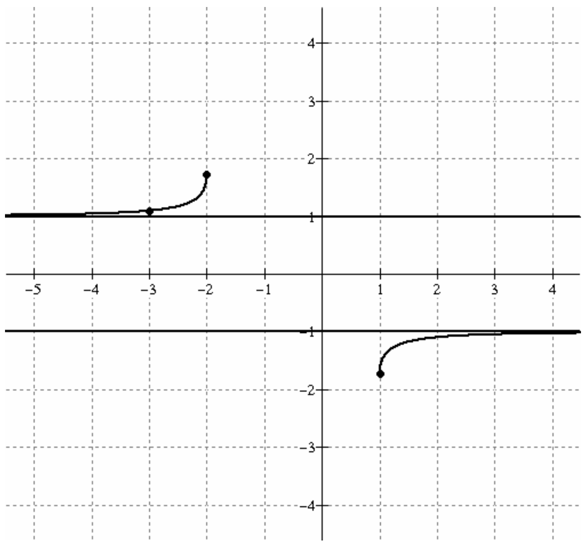
(4) $k(x)=\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+2x}$

$\operatorname{dom} k=]-\infty,-2]\cup[1,+\infty[$.

$\lim\limits_{x\to -3} k(x)=2\sqrt{2}-\sqrt{3}=k(-3)$

k est continue en -3.

$\lim\limits_{x\to 0} k(x)$ n'existe pas car 0 n'est pas un point adhérent et non isolé du $\operatorname{dom} k$.



$$\lim_{x\to\pm\infty} k(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+2x}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+2x}\right)\left(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+2x}\right)}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+2x}}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cancel{x^2}-1-\cancel{x^2}-2x}{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}}}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-2x-1}{|x|\underbrace{\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{2}{x}}\right)}_{\to 2}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-2x-1}{2|x|} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-2x}{2|x|} = \mp 1$$

Donc : $\mathcal{G}_k$ admet l'A.H. à droite : $y=-1$ et l'A.H. à gauche : $y=1$.

(5) $\quad n(x) = \dfrac{2\left|x^2-1\right|}{x^3+x-2}$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
x^2-1	$+$	0	-	0	$+$
$\left\|x^2-1\right\|$	x^2-1	0	$1-x^2$	0	x^2-1
$n(x)$	$\dfrac{2\left(x^2-1\right)}{x^3+x-2}$	0	$\dfrac{2\left(1-x^2\right)}{x^3+x-2}$	//	$\dfrac{2\left(x^2-1\right)}{x^3+x-2}$

$\lim\limits_{x\to-1} n(x) = \lim\limits_{x\to-1} \dfrac{2\left|x^2-1\right|}{x^3+x-2} = 0 = n(-1) \Rightarrow n$ est continue en –1.

$\lim\limits_{x\to 1} n(x) \to$ f.i. $\dfrac{0}{0}$

Le dénominateur est donc divisible par $x-1$. Le schéma de Horner donne :

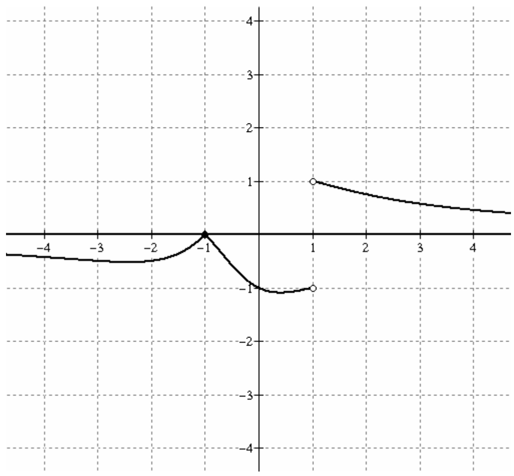
$$x^3+x-2 = (x-1)\left(x^2+x+2\right).$$

Donc :

$$\lim_{x\to 1^+} n(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{2\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}\left(x^2+x+2\right)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{2(x+1)}{\left(x^2+x+2\right)} = \frac{4}{4} = 1$$

$$\lim_{x\to 1^-} n(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{-2\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}\left(x^2+x+2\right)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-2(x+1)}{\left(x^2+x+2\right)} = -\frac{4}{4} = -1$$

$\lim\limits_{x\to 1} n(x)$ n'existe pas, mais $\mathcal{G}_n$ admet un « saut » en $x=1$.



$\lim\limits_{x\to\pm\infty} n(x)$

$= \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2\left(x^2-1\right)}{x^3+x-2}$

$= \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2x^2}{x^3}$

$= \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2}{x} = 0^{\pm}$

$\Rightarrow$ A.H. : $y=0$

G. Lorang