2e C1 Corrigé du devoir I, 3

Question 1

$$f(x) = \frac{x^3-x}{x^2-4} = \frac{x(x^2-1)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x(x-1)(x+1)}{(x-2)(x+2)}$$

1. $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$
2. $f(x) = 0 \iff x = 0$ ou $x = 1$ ou $x = -1$
3. $\lim\limits_{x \to 2^\pm} f(x) = \text{"}\frac{6}{0^\pm}\text{"} = \pm\infty \Rightarrow$ A.V. $x = 2$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
x^2-4		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\lim\limits_{x \to -2^\pm} f(x) = \text{"}\frac{-6}{0^\mp}\text{"} = \mp\infty \Rightarrow$ A.V. $x = -2$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} x = \pm\infty \Rightarrow$ pas d'A.H.

Transformons $f(x)$:

$$\begin{array}{rr|l} x^3 & -x & x^2-4 \\ \cline{3-3} -x^3 & +4x & x \\ \hline \text{"} & 3x & \end{array} \Rightarrow x^3 - x = (x^2-4)\cdot x + 3x$$

$$\Rightarrow f(x) = x + \underbrace{\frac{3x}{x^2-4}}_{\varepsilon(x)}$$

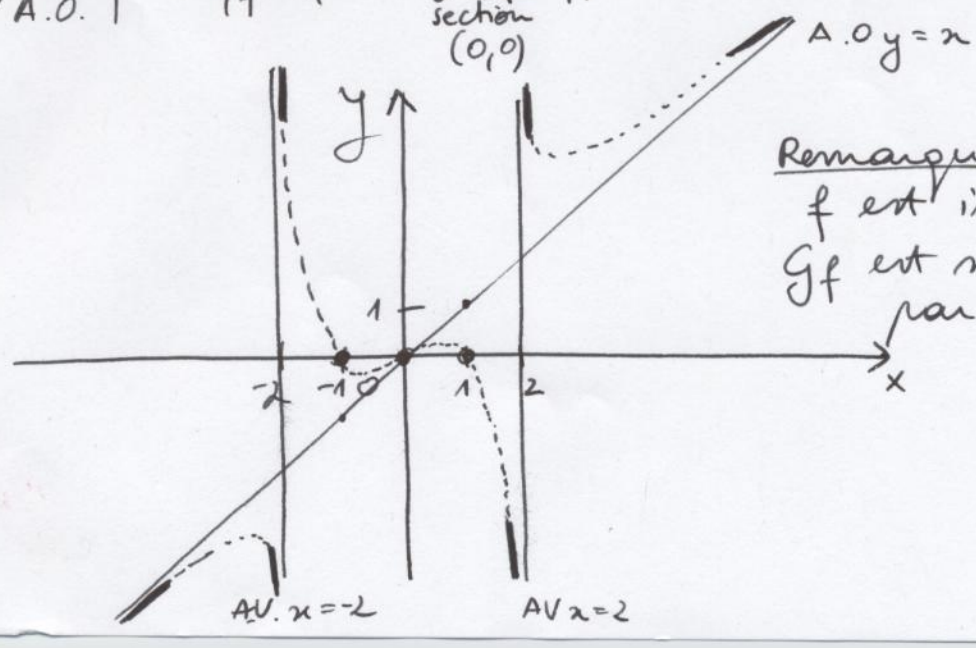
Or, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \varepsilon(x) = 0^\pm \Rightarrow \lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - x) = 0^\pm$

Donc G_f a l'asymptote oblique : $y = x$

4. $f(x) - x = \frac{3x}{x^2-4} = \varepsilon(x)$. Il faut étudier le signe de $\varepsilon(x)$

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$3x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2-4		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$\varepsilon(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	
Position de G_f p.r. à l'A.O.		A.O / G_f	‖	G_f / A.O	pt. d'intersection $(0,0)$	A.O / G_f	‖	G_f / A.O	

5)



Remarque : f est impaire ! G_f est symétrique par rapport à O.

Question 2

$$g(x) = \sqrt{x^2-2x} + x$$

1. C.E. $x^2 - 2x \geq 0 \iff x(x-2) \geq 0$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
x^2-2x		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\text{dom}\, g =]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$

2. $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = g(0) = 0 \Rightarrow$ g est continue à gauche en 0

$\lim\limits_{x\to 2} g(x) = g(2) = 2 \Rightarrow$ g est continue à droite en 2

3. $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = (+\infty) + (+\infty) = +\infty$ (pas de f.i. !!)

$\Rightarrow$ pas d'A.H en $+\infty$

$$\lim_{x\to -\infty} g(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{(\sqrt{x^2-2x}+x)(\sqrt{x^2-2x}-x)}{\sqrt{x^2-2x}-x}$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{\cancel{x^2} - 2x - \cancel{x^2}}{|x|\sqrt{1-2/x} - x}$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{-2\cancel{x}}{-\cancel{x}\,(\underbrace{\sqrt{1-2/x}+1}_{\to 2})} = \frac{-2}{-2} = 1$$

$\Rightarrow$ A.H à gauche : $y = 1$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x^2-2x}+x}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\cancel{x}(\sqrt{1-2/x}+1)}{\cancel{x}} = \underline{\underline{2}}$$

$$\lim_{x\to +\infty} g(x) - 2x = \lim_{x\to +\infty} \sqrt{x^2-2x} - x$$

$$= \dots = \lim_{x\to +\infty} \frac{\cancel{x^2} - 2x - \cancel{x^2}}{x(\sqrt{1-2/x}+1)} = \underline{\underline{-1}}$$

Donc : A.O à droite : $y = 2x - 1$

4)