2C1 Corrigé du devoir de mathématiques II,1 1.02.06

Question 2

(1) $\operatorname{dom} f = [-3,-6[$

$$f(x) = \begin{cases} -2x-3 & \text{si } -3 \leq x < -1 \\ x+1 & \text{si } -1 \leq x \leq 3 \\ -\frac{1}{2}x + \frac{11}{2} & \text{si } 3 \leq x < 6 \end{cases}$$

(2) $\operatorname{dom}_c f = [-3,6[\setminus\{-1\}$. En effet, comme f est affine sur chacun des intervalles ouverts $]-3,-1[$, $]-1,3[$ et $]3,6[$, il est clair que f est continue en chaque réel appartenant à l'un de ces intervalles. Par ailleurs :

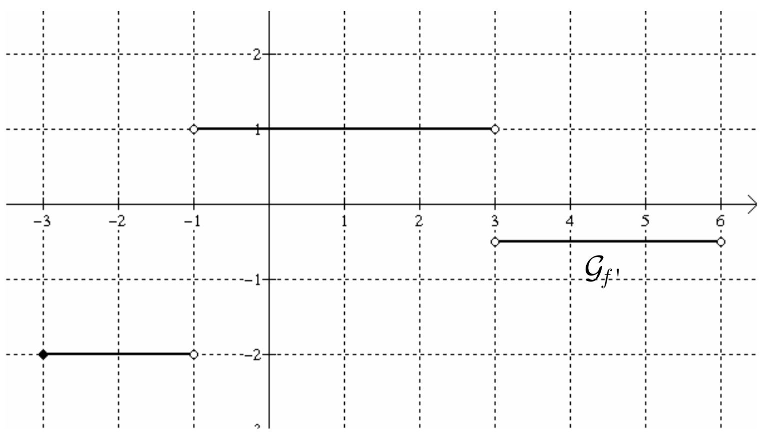
- f est continue en -3 car $\lim\limits_{x\to-3} f(x) = \lim\limits_{x\to-3^+} f(x) = 3 = f(-3)$;
- f est discontinue en -1 car $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = -1$ et $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = 0$;
- f est continue en 3 car $\lim\limits_{x\to3^-} f(x) = 4 = \lim\limits_{x\to3^+} f(x)$.
- f est discontinue en 6 car $6 \notin \operatorname{dom} f$.

(3) $\operatorname{dom}_d f = [-3,6[\setminus\{-1,3\}$. En effet, comme f est affine sur chacun des intervalles ouverts $]-3,-1[$, $]-1,3[$ et $]3,6[$, il est clair que f est dérivable en chaque réel appartenant à l'un de ces intervalles. Par ailleurs :

- $f'(-3) = f_d'(-3) = -2$ (f n'est pas définie à gauche de -3) ;
- f n'est pas dérivable en -1 ni en 6 car f est discontinue en -1 et en 6.
- f n'est pas dérivable en 3 car $f_g'(3) = 1 \neq f_d'(3) = -\frac{1}{2}$.

(4) On a d'après ce qui précède :

$$f'(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } -3 \leq x < -1 \\ 1 & \text{si } -1 < x < 3 \\ -\frac{1}{2} & \text{si } 3 < x < 6 \end{cases}$$



Question 3

(1) $f : x \mapsto \dfrac{(5x-2)^3}{(1-2x)^7}$

f est un quotient de deux fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}$, dont le dénominateur s'annule uniquement en $\frac{1}{2}$. Par conséquent :
$\operatorname{dom} f = \operatorname{dom}_c f = \operatorname{dom}_d f = \mathbb{R}\backslash\{\frac{1}{2}\}$.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\big((5x-2)^3\big)'(1-2x)^7 - (5x-2)^3\big((1-2x)^7\big)'}{(1-2x)^{14}} \\
&= \frac{3(5x-2)^2\cdot 5\cdot(1-2x)^7 - (5x-2)^3\cdot 7\cdot(1-2x)^6\cdot(-2)}{(1-2x)^{14}} \\
&= \frac{(5x-2)^2(1-2x)^6[15(1-2x)+14(5x-2)]}{(1-2x)^{14}} \\
&= \frac{(5x-2)^2(15-30x+70x-28)}{(1-2x)^8} \\
&= \frac{(5x-2)^2(40x-13)}{(1-2x)^8}
\end{aligned}$$

(2) $f : x \mapsto 7x^4\cdot\sqrt[3]{x^2} - \dfrac{2}{9x^6\sqrt{x}} = 7x^{4+\frac{2}{3}} - \dfrac{2}{9}x^{-6-\frac{1}{2}} = 7x^{\frac{14}{3}} - \dfrac{2}{9}x^{-\frac{13}{2}}$

$f(x)$ existe $\Leftrightarrow x > 0$, donc $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}_+^*$.
Il est clair que f est continue et dérivable en tout réel strictement positif car c'est une somme de deux fonctions puissances (multipliées par une constante).
Par conséquent : $\operatorname{dom} f = \operatorname{dom}_c f = \operatorname{dom}_d f = \mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 7\Big(x^{\frac{14}{3}}\Big)' - \frac{2}{9}\Big(x^{-\frac{13}{2}}\Big)' \\
&= 7\cdot\frac{14}{3}x^{\frac{11}{3}} - \frac{2}{9}\Big(-\frac{13}{2}\Big)x^{-\frac{15}{2}} \\
&= \frac{98}{3}x^3\cdot\sqrt[3]{x^2} + \frac{13}{9x^7\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

(3) $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x-2}-1}$

C.E. : $x \geq 0$ et $x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$ et

$$\sqrt{x-2}-1 \neq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-2} \neq 1 \Leftrightarrow x-2 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 3$$

Par conséquent : $\operatorname{dom} f = [2,+\infty[\backslash\{3\}$.
f est continue sur ce domaine comme quotient de deux fonctions continues sur $[2,+\infty[$ dont le dénominateur s'annule uniquement en 3. Donc $\operatorname{dom}_c f = [2,+\infty[\backslash\{3\}$.

f est dérivable sur $]2,+\infty[\setminus\{3\}$ comme quotient de deux fonctions dérivables sur $]2,+\infty[$ dont le dénominateur s'annule uniquement en 3. La dérivabilité en 2 devra être étudiée à part :

$$
\begin{aligned}
(\forall x\in]2,+\infty[\setminus\{3\})\quad f'(x) &= \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x-2}-1}\right)' \\
&= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\sqrt{x-2}-1\right)-\left(\sqrt{x}+1\right)\frac{1}{2\sqrt{x-2}}\cdot 1}{\left(\sqrt{x-2}-1\right)^2} \\
&= \frac{\frac{\sqrt{x-2}-1}{2\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x-2}}}{\left(\sqrt{x-2}-1\right)^2} \\
&= \frac{\left(\sqrt{x-2}-1\right)\sqrt{x-2}-\left(\sqrt{x}+1\right)\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{x-2}\left(\sqrt{x-2}-1\right)^2} \\
&= \frac{x-2-\sqrt{x-2}-x-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{x-2}\left(\sqrt{x-2}-1\right)^2} \\
&= -\frac{2+\sqrt{x}+\sqrt{x-2}}{2\sqrt{x}\sqrt{x-2}\left(\sqrt{x-2}-1\right)^2}
\end{aligned}
$$

Maintenant :

$$\lim_{x\to 2} f'(x)=\lim_{x\to 2}-\frac{2+\sqrt{x}+\sqrt{x-2}}{2\sqrt{x}\sqrt{x-2}\left(\sqrt{x-2}-1\right)^2}=-\frac{2+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\cdot 0^+\cdot 1}=-\infty$$

Donc f n'est pas dérivable en 2 et $\operatorname{dom}_d f=]2,+\infty[\setminus\{3\}$.

(4) $\quad f : x\mapsto (x-1)\sqrt{6-5x-x^2}$

C.E. : $6-5x-x^2\geq 0 \Leftrightarrow -(x+6)(x-1)\geq 0 \Leftrightarrow -6\leq x\leq 1$

Donc $\operatorname{dom} f=[-6,1]$.

f est un produit de deux fonctions dont la 1re , $x\mapsto x-1$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et la 2e, $x\mapsto\sqrt{6-5x-x^2}$ est une composée :

$$x\overset{u}{\mapsto}6-5x-x^2=y\overset{v}{\mapsto}\sqrt{6-5x-x^2}=\sqrt{y}$$

Comme v est continue (resp. dérivable) en tout point $y\geq 0$ (resp. $y>0$), cette composée $v\circ u$ est continue (resp. dérivable) en tout réel tel que $6-5x-x^2\geq 0$ (resp. $6-5x-x^2>0$). Ainsi : $\operatorname{dom}_c f=[-6,1]$ et f est dérivable en tout réel de $]-6,1[$. La dérivabilité en –6 et en 1 devra être étudiée à part.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 1\cdot\sqrt{6-5x-x^2}+(x-1)\frac{1}{2}\left(6-5x-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}(-5-2x) \\
&= \sqrt{6-5x-x^2}+\frac{(x-1)(-5-2x)}{2\sqrt{6-5x-x^2}}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2\left(6-5x-x^2\right)+(x-1)(-5-2x)}{2\sqrt{6-5x-x^2}}\\
&= \frac{-2(x+6)(x-1)+(x-1)(-5-2x)}{2\sqrt{6-5x-x^2}}\\
&= \frac{(x-1)[-2(x+6)+(-5-2x)]}{2\sqrt{6-5x-x^2}}\\
&= \frac{(1-x)(4x+17)}{2\sqrt{(1-x)(x+6)}}\\
&= \frac{4x+17}{2}\sqrt{\frac{1-x}{x+6}}
\end{aligned}$$

Maintenant :

$\lim\limits_{x\to -6} f'(x) = \lim\limits_{x\to -6^+} \frac{4x+17}{2}\sqrt{\frac{1-x}{x+6}} = \frac{-7\sqrt{7}}{2\cdot 0^+} = -\infty$, donc $f'(-6)$ n'existe pas,

$\lim\limits_{x\to 1} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1} \frac{4x+17}{2}\sqrt{\frac{1-x}{x+6}} = \frac{21\cdot 0}{2\sqrt{7}} = 0$, donc $f'(1) = 0$.

Ainsi : $\mathrm{dom}_d\, f =]-6{,}1]$.

G. Lorang