Question 2

(1) C.E. pour $f(x)$: $\frac{2x-3}{x-1} \geq 0$. On fait un tableau du signe et on trouve $\operatorname{dom} f =]-\infty,1[\cup [\frac{3}{2},+\infty[$. Il est clair que f est dérivable sur $]-\infty,1[\cup]\frac{3}{2},+\infty[$ comme composée de fonctions dérivables. On a :

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{2x-3}{x-1}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{2(x-1)-(2x-3)}{(x-1)^2} = \frac{1}{2(x-1)^2}\sqrt{\frac{x-1}{2x-3}}$$

Donc : $f'(0) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{-1}{-3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$. D'autre part : $f(0) = \sqrt{3}$. Par conséquent, l'équation de la tangente en $\left(0,\sqrt{3}\right)$ à $\mathcal{G}_f$ est :

$$\boxed{y-\sqrt{3} = \frac{1}{2\sqrt{3}}(x-0) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2\sqrt{3}}x+\sqrt{3}}$$

(2) C.E. pour $f(x)$: $2x-4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$. f est dérivable sur $]2,+\infty[$ comme composée de deux fonctions dérivables. On a :

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x-4}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2x-4}}$$

Or : $\lim\limits_{x\to 2} f'(x) = +\infty$. Par conséquent, f n'est pas dérivable en 2 et $\mathcal{G}_f$ admet en $(2,0)$ une demi-tangente verticale d'équation : $x = 2$, $y \geq 0$.

(3) On écrit $f(x)$ sans valeur absolue et on en déduit sa dérivée :

x	$-\infty$	-1		2	$+\infty$
$f(x) = \left\lvert x^2-x-2\right\rvert$	x^2-x-2	0	$-x^2+x+2$	0	x^2-x-2
$f'(x)$	$2x-1$	//	$-2x+1$	//	$2x-1$

f n'est pas dérivable en -1 car :

$$f_g'(-1) = \lim_{x\to -1^-} f'(x) = -3 \text{ et } f_d'(-1) = \lim_{x\to -1^+} f'(x) = 3.$$

On a donc deux demi-tangentes à $\mathcal{G}_f$ en $(-1,0)$, qui est un point anguleux :

$dt_g : y-0 = -3(x+1), x \leq -1$
$\Leftrightarrow y = -3x-3, x \leq -1$

et

$dt_g : y-0 = 3(x+1), x \geq -1$
$\Leftrightarrow y = 3x+3, x \geq -1$

Question 3

$f : x \mapsto \dfrac{x^2+2x-3}{2x-3}$.

(1) $\operatorname{dom} f = \operatorname{dom}_c f = \operatorname{dom}_d f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$.

(2) A l'aide de la V200 on trouve : $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -3$.

(3) et (4) : $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}^{\pm}} f(x) = \lim\limits_{x\to\frac{3}{2}^{\pm}} \dfrac{\frac{9}{4}}{0^{\pm}} = \pm\infty \Rightarrow$ A.V. : $x = \dfrac{3}{2}$.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{2x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{2} = \pm\infty \Rightarrow \text{pas d'A.H.}$$

Pour trouver l'asymptote oblique éventuelle, on transforme $f(x)$ à l'aide d'une division euclidienne :

$$\begin{array}{l|l}
x^2 + 2x - 3 & \underline{2x-3} \\
\underline{-x^2 + \frac{3}{2}x} & \frac{1}{2}x + \frac{7}{4} \\
\qquad \frac{7}{2}x - 3 & \\
\qquad \underline{-\frac{7}{2}x + \frac{21}{4}} & \\
\qquad\qquad \frac{9}{4} &
\end{array}$$

Par conséquent :

$$f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{7}{4} + \frac{9}{4(2x-3)}, \; x \neq \frac{3}{2}.$$

et donc :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x) - \frac{1}{2}x - \frac{7}{4}\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{9}{4(2x-3)} = 0^{\pm} \Rightarrow \text{A.O.} \equiv y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{4}$$

(5) On a, pour $x \neq \dfrac{3}{2}$:

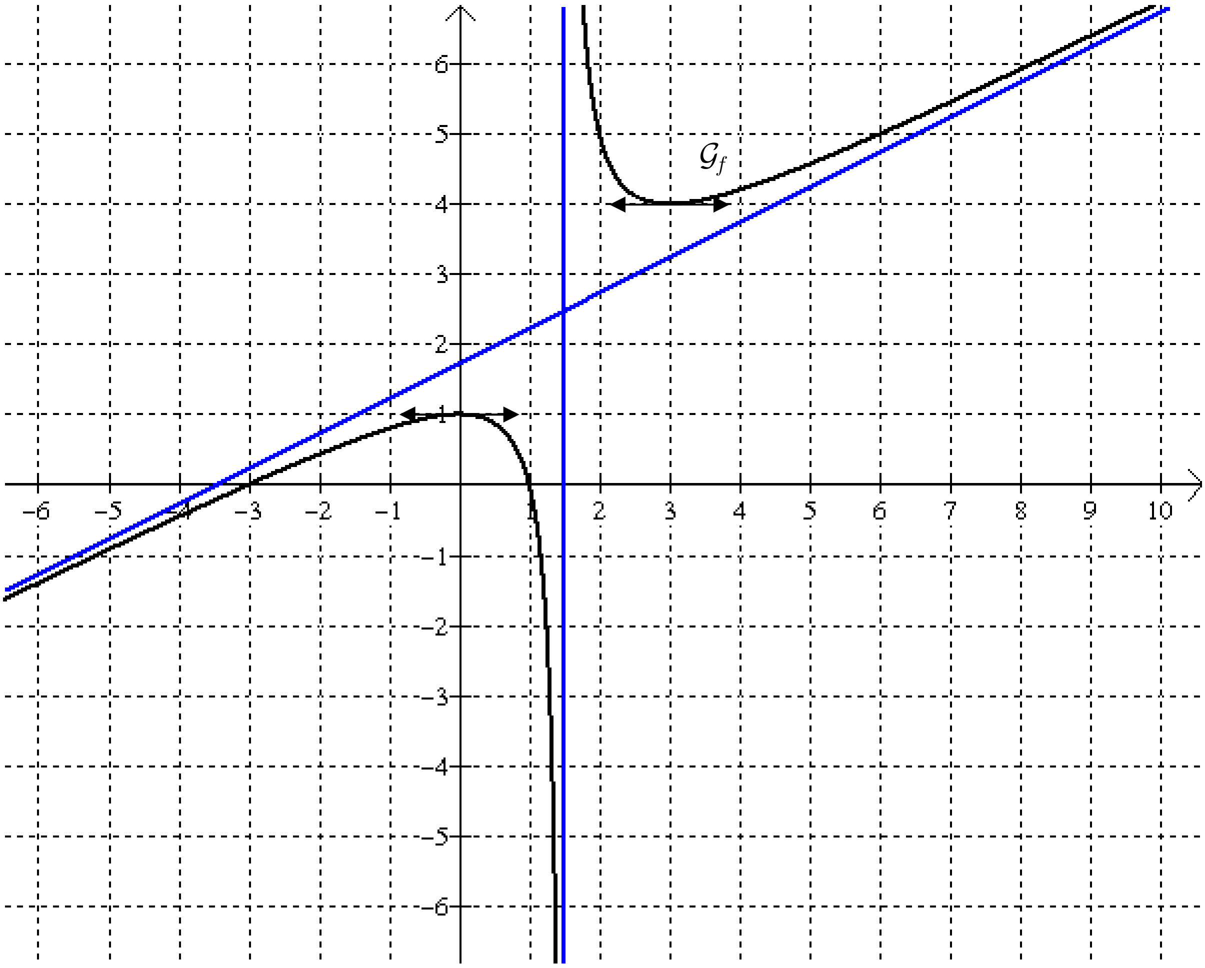
$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(2x+2)(2x-3) - 2\left(x^2 + 2x - 3\right)}{(2x-3)^2} \\
&= \frac{4x^2 - 2x - 6 - 2x^2 - 4x + 6}{(2x-3)^2} \\
&= \frac{2x^2 - 6x}{(2x-3)^2} = \frac{2x(x-3)}{(2x-3)^2}
\end{aligned}$$

Donc $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 3$.

(6) Tableau de variations :

x	$-\infty$	0		$\frac{3}{2}$		3	$+\infty$
$2x(x-3)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(2x-3)^2$	$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	//	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	1 (M)	↘ $-\infty$	//	$+\infty$ ↘	4 (m)	↗ $+\infty$

(7) Représentation graphique :



G. Lorang