Nom : ……………………………… Prénom : ………………………

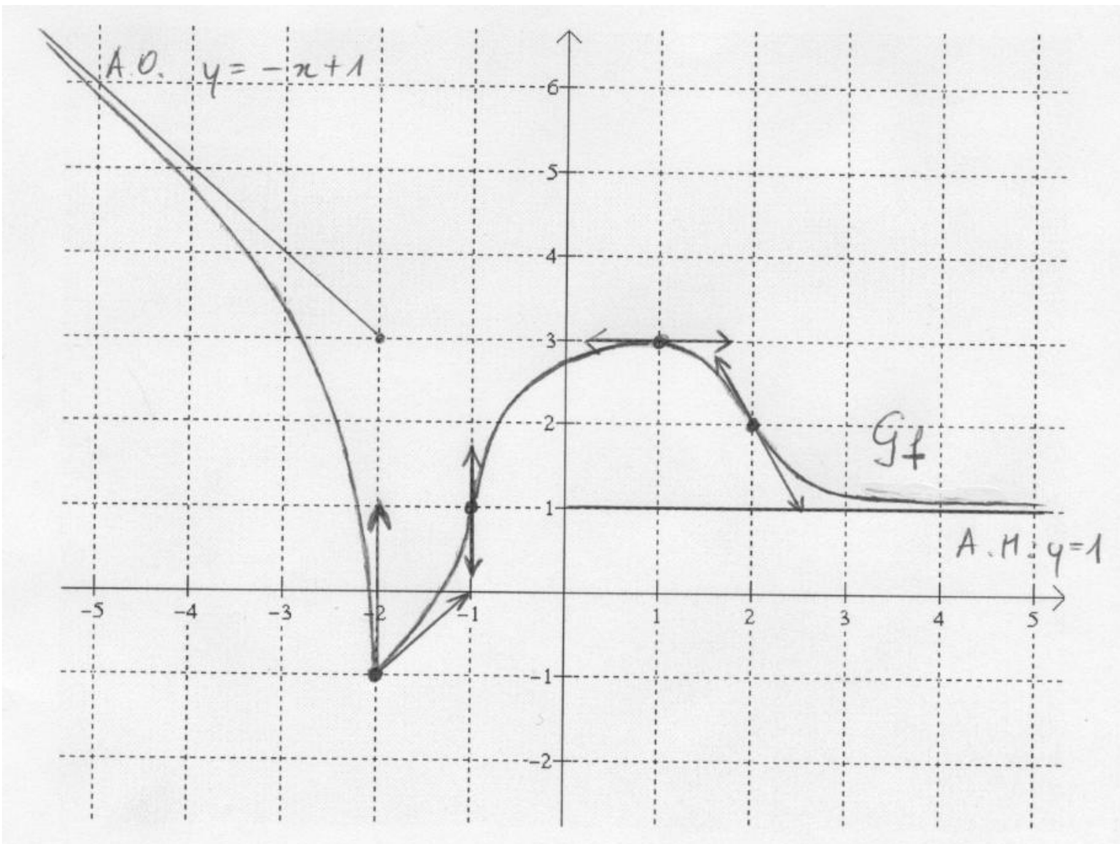
2C1 Devoir de mathématiques II,3 17.03.06

Question 1

(1) et (2) :

x	$-\infty$	-2		-1		1		2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$ $\quad_{-\infty}$	//	$_{1}$ $+$ $_{+\infty}$	//	$_{+\infty}$ $+$	0	$-$	-2	$-$
$f''(x)$	$-$	//	$+$	//	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	m -1	↗	1	↗	3 M	↘	2	↘ 1
$\mathcal{G}_f$	∩ A.O. $y=-x+1$	Pt. anguleux	∪	PI à tangente verticale		∩		PI	∪ A.H. $y=1$

(3)



(4) $\quad \operatorname{dom} f = \mathbb{R}\,,\ \operatorname{dom} f' = \operatorname{dom} f'' = \mathbb{R} \setminus \{-2,-1\}\,.$

Question 2

Soit $f : x \mapsto \dfrac{(5x-8)(x+1)^2}{x^2-4} = \dfrac{5x^3+2x^2-11x-8}{x^2-4}$.

(1) $\operatorname{dom} f = \operatorname{dom}_c f = \operatorname{dom} f' = \mathbb{R} \setminus \{-2,2\}$, car f est une fraction rationnelle dont le dénominateur s'annule en 2 et en –2. Les racines de f sont : –1 et $\frac{8}{5}$.

(2) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{5x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} 5x = \pm\infty \Rightarrow$ pas d'A.H.

$\lim\limits_{x\to-2^\pm} f(x) = \dfrac{-18}{0^\mp} = \pm\infty \Rightarrow$ A.V. $x=-2$

$\lim\limits_{x\to2^\pm} f(x) = \dfrac{18}{0^\pm} = \pm\infty \Rightarrow$ A.V. $x=2$

x		–2		2	
x^2-4	+	0	–	0	+

On effectue ensuite la division euclidienne du numérateur par le dénominateur et on en déduit que :

$$f(x) = 5x+2+\frac{9x}{x^2-4}$$

Par conséquent :

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-(5x+2)] = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{9x}{x^2-4} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{9x}{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{9}{x} = 0$$

$\Rightarrow$ A.O. : $y = 5x+2$.

(3) Rappelons que $\operatorname{dom} f' = \mathbb{R} \setminus \{-2,2\}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\left[5(x+1)^2+2(5x-8)(x+1)\right]\left(x^2-4\right)-2x(5x-8)(x+1)^2}{\left(x^2-4\right)^2} \\ &= \frac{(x+1)\left\{[5(x+1)+2(5x-8)]\left(x^2-4\right)-2x(5x-8)(x+1)\right\}}{\left(x^2-4\right)^2} \\ &= \frac{(x+1)\left\{(15x-11)\left(x^2-4\right)-2x(5x-8)(x+1)\right\}}{\left(x^2-4\right)^2} \\ &\underset{V200}{=} \frac{(x+1)(x-1)\left(5x^2-44\right)}{(x-2)^2(x+2)^2} \end{aligned}$$

Racines : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm1$ ou $x = \pm2\sqrt{\frac{11}{5}}$.

x	$-\infty$	$-2\sqrt{\frac{11}{5}}$		-2		-1		1		2		$2\sqrt{\frac{11}{5}}$	$+\infty$
x^2-1	+	+	+	+	+	0	–	0	+	+	+	+	+
$5x^2-44$	+	0	–	–	–	–	–	–	–	–	–	0	+
$\left(x^2-4\right)^2$	+	+	+	0	+	+	+	+	+	0	+	+	+
$f'(x)$	+	0	–	//	–	0	+	0	–	//	–	0	+

(4) dom f'' = dom $f = \mathbb{R} \setminus \{-2{,}2\}$ car f est une fraction rationnelle.

$$f''(x) \underset{V200}{=} \frac{18x\left(x^2+12\right)}{(x-2)^3\,(x+2)^3} = \frac{18x\left(x^2+12\right)}{\left(x^2-4\right)^3}$$

Racines : $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Comme $x^2 + 12$ est toujours > 0, ce facteur n'intervient pas dans l'étude du signe. D'autre part, on remarque que $\left(x^2-4\right)^3$ a toujours le même signe que $x^2 - 4$.

x	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$
$18x$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
x^2-4	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	//	$+$	0	$-$	//	$+$

Par conséquent f'' s'annule et change de signe en 0. $\mathcal{G}_f$ admet donc le point d'inflexion $I(0,2)$.

(5)

x	$-\infty$	$-2\sqrt{\frac{11}{5}}$		-2		-1		0		1		2		$2\sqrt{\frac{11}{5}}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	−	//	−	0	+	+	+	0	−	//	−	0	+
$f''(x)$	−	−	−	//	+	+	+	0	−	−	−	//	+	+	+
$f(x)$	$-\infty$ ↗	M -18,39	↘ $-\infty$	//	$+\infty$ ↘	m 0	↗	2	↗	4 M	↘ $-\infty$	//	$+\infty$ ↘	m 22,39	↗ $+\infty$
$\mathcal{G}_f$				//				PI				//			

La V200 donne : $f\left(2\sqrt{\frac{11}{5}}\right) = 2 + \frac{11\sqrt{55}}{4} \cong 22,39$

$$f\left(-2\sqrt{\frac{11}{5}}\right) = 2 - \frac{11\sqrt{55}}{4} \cong -18,39$$

Au point d'inflexion I on a : $f'(0) \underset{V200}{=} \frac{11}{4}$.

L'équation de la tangente à $\mathcal{G}_f$ en I est donc :

$$y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{11}{4}x + 2$$

(6) Pour la représentation graphique on ne peut pas prendre un repère orthonormé !