2C1 Corrigé du devoir de mathématiques III,2 26.05.06

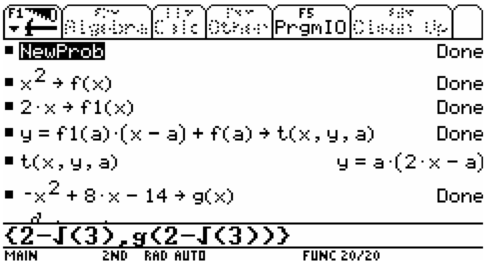
Problème

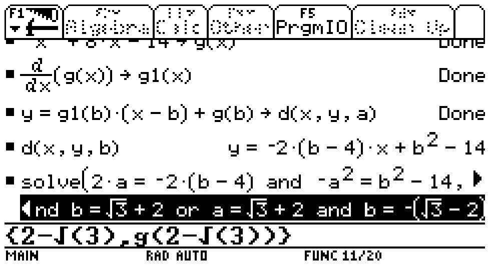
(1) Soit $f : x \mapsto x^2$. Notons t_a la tangente à $\mathcal{P}_1$ au point d'abscisse a :

$$t_a : y = f'(a)(x-a) + f(a)$$
$$\Leftrightarrow y = 2ax - a^2$$

De même, soit $g : x \mapsto -x^2 + 8x - 14$. Notons d_b la tangente à $\mathcal{P}_2$ au point d'abscisse b :

$$d_b : y = g'(b)(x-b) + g(b)$$
$$\Leftrightarrow y = -2(b-4)x + b^2 - 14$$





On cherche deux abscisses a et b telles que les tangentes t_a et d_b coïncident. Or :

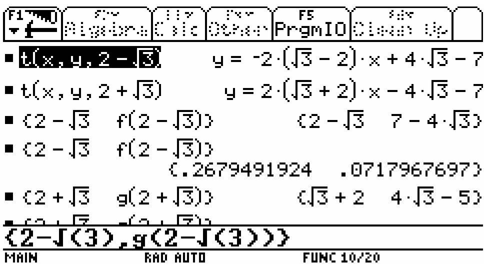
$$t_a = d_b \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = -2(b-4) \\ -a^2 = b^2 - 14 \end{cases}$$

On résout ce système avec la V200 et on trouve :

$$\begin{cases} a = 2 - \sqrt{3} \\ b = 2 + \sqrt{3} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} a = 2 + \sqrt{3} \\ b = 2 - \sqrt{3} \end{cases}$$

Les deux tangentes communes sont donc :

$$t_{2-\sqrt{3}} : y = 2\left(2-\sqrt{3}\right)x + 4\sqrt{3} - 7 \text{ et}$$
$$t_{2+\sqrt{3}} : y = 2\left(2+\sqrt{3}\right)x - 4\sqrt{3} - 7$$



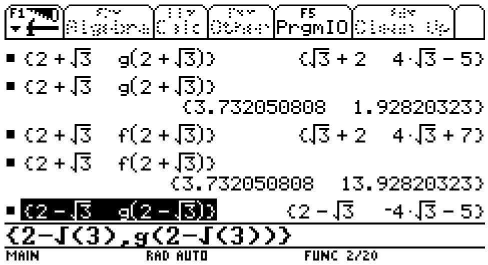
Les points de contact de $t_{2-\sqrt{3}}$ avec $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont respectivement :

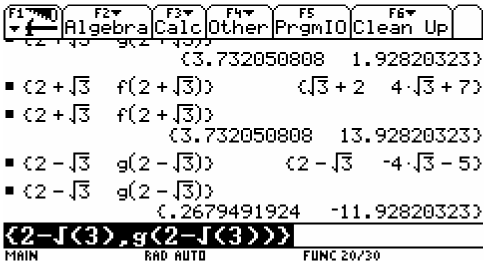
$$A\left(2-\sqrt{3}, f\left(2-\sqrt{3}\right)\right) = A\left(2-\sqrt{3}, 7-4\sqrt{3}\right) \cong A\left(0{,}2679; 0{,}0718\right)$$
$$B\left(2+\sqrt{3}, g\left(2+\sqrt{3}\right)\right) = B\left(2+\sqrt{3}, 4\sqrt{3}-5\right) \cong B\left(3{,}7321; 1{,}9282\right)$$

Les points de contact de $t_{2+\sqrt{3}}$ avec $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont respectivement :

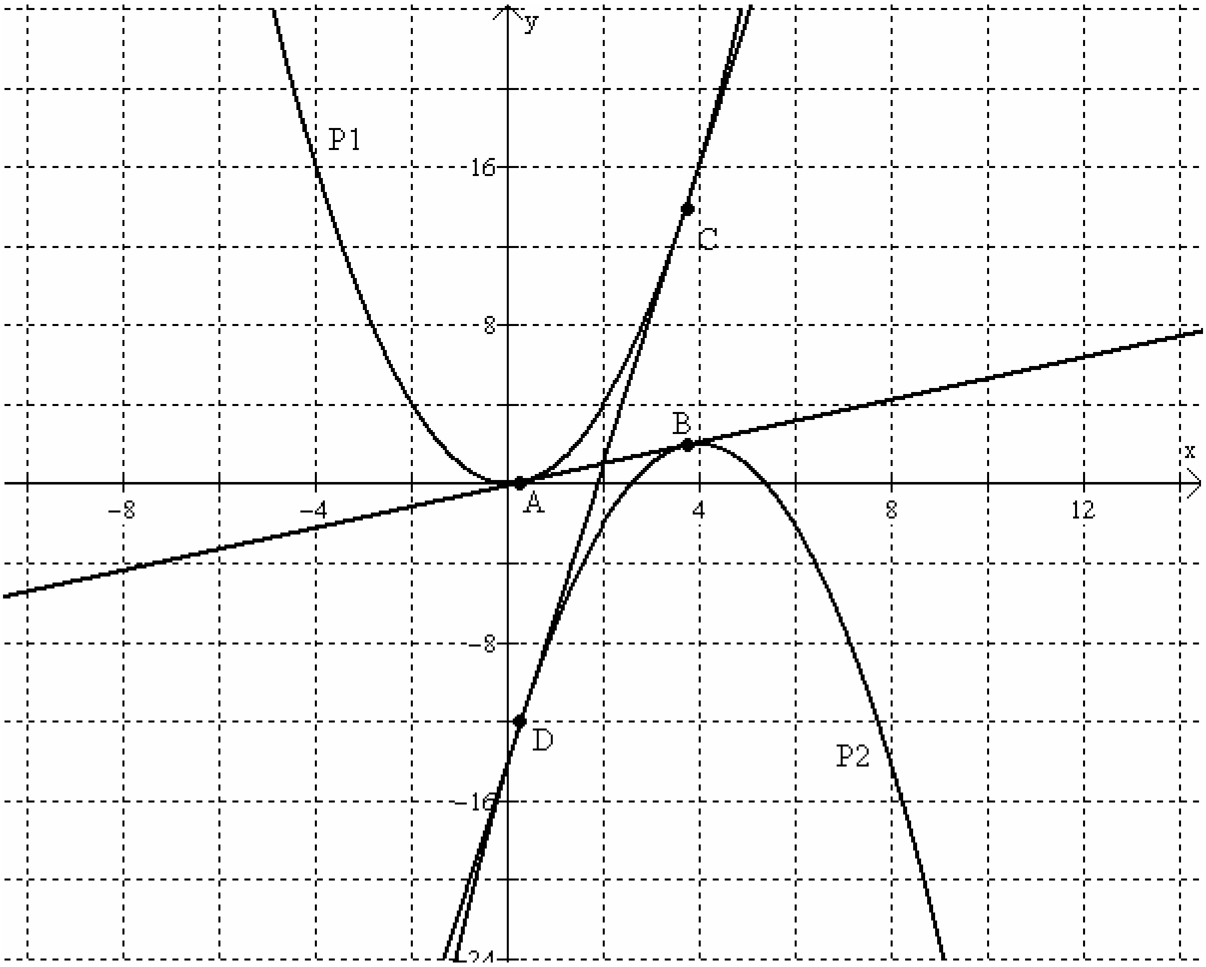
$C\left(2+\sqrt{3}, f\left(2+\sqrt{3}\right)\right) = C\left(2+\sqrt{3}, 7+4\sqrt{3}\right) \cong C\Big(3{,}7321; 13{,}9282\Big)$

$D\left(2-\sqrt{3}, g\left(2-\sqrt{3}\right)\right) = D\left(2-\sqrt{3}, -4\sqrt{3}-5\right) \cong D\Big(0{,}2679; -11{,}9282\Big)$





(2) Représentation graphique :



Question 1

(1) Factorisons le numérateur et le dénominateur :

$$\cos 4a - \cos 2a - \sin a = -2\sin 3a \sin a - \sin a = -\sin a\,(2\sin 3a + 1)$$

$$\sin 4a + \sin 2a + \cos a = 2\sin 3a \cos a + \cos a = \cos a\,(2\sin 3a + 1)$$

Donc, on a les conditions d'existence :

$$\begin{cases} \cos a \neq 0 \Leftrightarrow a \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ \sin 3a \neq -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a \neq -\dfrac{\pi}{6} + k\cdot 2\pi \\ 3a \neq -\dfrac{5\pi}{6} + k\cdot 2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq -\dfrac{\pi}{18} + k\cdot\dfrac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \\ a \neq -\dfrac{5\pi}{18} + k\cdot\dfrac{2\pi}{3} \end{cases} \end{cases}$$

c.-à-d. :

$$a \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, -\frac{\pi}{18} + k\cdot\frac{2\pi}{3}, -\frac{5\pi}{18} + k\cdot\frac{2\pi}{3} / k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Sous cette condition :

$$\frac{\cos 4a - \cos 2a - \sin a}{\sin 4a + \sin 2a + \cos a} = -\frac{\sin a}{\cos a} = -\tan a$$

(2) Factorisons le numérateur et le dénominateur :

$$1 - \cos\alpha = 2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$1 + \cos\alpha = 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Donc, on a la condition d'existence :

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \neq 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \alpha \neq \pi + k\cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Il faut remarquer que la C.E. pour le membre de droite est la même !

Donc, si $\alpha \neq \pi + k\cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$, alors :

$$\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Question 2

(1) On pose $y = \tan x$. L'inéquation devient alors :

$$y^2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}y - 1 \geq 0.$$

Les racines du trinôme sont (V200) : $y = -\sqrt{3}$ ou $y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Un tableau du signe donne alors la solution en y :

$$y \leq -\sqrt{3} \quad \text{ou} \quad y \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$$

On repasse à l'inconnue x :

$$
\begin{aligned}
&\tan x \le -\sqrt{3} \quad \text{ou} \quad \tan x \ge \frac{\sqrt{3}}{3}\\
&\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2}+k\pi < x \le -\frac{\pi}{3}+k\pi \quad \text{ou} \quad \frac{\pi}{6}+k\pi \le x < \frac{\pi}{2}+k\pi, \quad k\in\mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

Donc :

$$S=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left(\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi,-\frac{\pi}{3}+k\pi\right]\cup\left[\frac{\pi}{6}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right[\right)$$

(2)

$$
\begin{aligned}
&\sin 4x < \cos 2x\\
&\Leftrightarrow 2\sin 2x\cos 2x < \cos 2x\\
&\Leftrightarrow 2\sin 2x\cos 2x - \cos 2x < 0\\
&\Leftrightarrow \cos 2x\,(2\sin 2x - 1) < 0
\end{aligned}
$$

Les fonctions $x\mapsto \cos 2x$ et $x\mapsto 2\sin 2x-1$ sont périodiques de période $\frac{2\pi}{2}=\pi$. Par conséquent, il suffit d'étudier le signe du produit sur $[0,\pi]$.

Racines :

- $\cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$

  Les racines dans $[0,\pi]$ sont donc $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4}$.
- D'autre part :

  $2\sin 2x-1=0 \Leftrightarrow \sin 2x=\frac{1}{2}$

  $\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{6}+k\cdot 2\pi$ ou $2x=\frac{5\pi}{6}+k\cdot 2\pi$

  $\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{12}+k\pi$ ou $x=\frac{5\pi}{12}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

  Les racines dans $[0,\pi]$ sont donc $\frac{\pi}{12}$ et $\frac{5\pi}{12}$.

x	0	$\frac{\pi}{12}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{12}$		$\frac{3\pi}{4}$	π
$\cos 2x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$2\sin 2x-1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
produit	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Les solutions étant périodiques de période π, on peut remplacer l'intervalle $[0,\frac{\pi}{12}]$ par $[\pi,\frac{13\pi}{12}]$. Donc :

$$S=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left(\left]\frac{\pi}{4}+k\pi,\frac{5\pi}{12}+k\pi\right[\cup\left]\frac{3\pi}{4}+k\pi,\frac{13\pi}{12}+k\pi\right[\right)$$

G. Lorang