Question 1

(1) $\mathcal{G}_f : y = \operatorname{Arctan}(x+1) + \dfrac{\pi}{2}$ et $\mathcal{G}_g : y = -2\operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{x}{4}\right)$

(2) $\mathcal{G}_f$ admet deux asymptotes horizontales :

- A.H. à gauche : $y = 0$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{Arctan}(x+1) + \dfrac{\pi}{2} = -\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{2} = 0$
- A.H. à droite : $y = \pi$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{Arctan}(x+1) + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{2} = \pi$

(3) $\mathcal{G}_g$ admet deux demi-tangentes verticales :

- 1/2-tangente vert. en $(-4,\pi)$ dirigée vers le bas : $x = -4,\ y \le \pi$ car :

$$\lim_{x\to-4} g'(x) = -2\lim_{x\to-4} \frac{\frac{1}{4}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{4}\right)^2}} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to-4}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{4}\right)^2}} = -\infty$$

- 1/2-tangente vert. en $(4,-\pi)$ dirigée vers le haut : $x = 4,\ y \ge -\pi$ car :

$$\lim_{x\to4} g'(x) = -\frac{1}{2}\lim_{x\to4}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{4}\right)^2}} = -\infty$$

(4) Si $-4 < x < 4$, on a : $g'(x) = -\dfrac{1}{2\sqrt{1-\left(\frac{x}{4}\right)^2}}$

Donc : $g(0) = 0$ et $g'(0) = -\dfrac{1}{2}$.

L'équation de la tangente à $\mathcal{G}_g$ en $(0,0)$ vaut donc :

$$y = -\frac{1}{2}x\,.$$

Question 2

(1) $$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{Arccos}3x-\frac{\pi}{2}}{2x} \underset{(H)}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to0}\frac{-\frac{3}{\sqrt{1-(3x)^2}}}{2} = \lim_{x\to0} -\frac{3}{2\sqrt{1-(3x)^2}} = -\frac{3}{2}$$

(2) $$\lim_{x\to+\infty}(2x+1)\left(\operatorname{Arctan}x-\tfrac{\pi}{2}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{Arctan}x-\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{2x+1}} \underset{(H)}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{\frac{-2}{(2x+1)^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(2x+1)^2}{-2\left(1+x^2\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2}{-2x^2} = -2$$

(3) $$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{Arcsin}x-x}{x^3\underbrace{(x+1)}_{\to1}} = 1\cdot\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{Arcsin}x-x}{x^3} \underset{(H)}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1}{3x^2}$$

$$\underset{(H)}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}\left(1-x^2\right)^{-\frac{3}{2}}(-2x)}{6x} = \lim_{x\to0}\frac{\left(1-x^2\right)^{-\frac{3}{2}}}{6} = \frac{1}{6}$$

Question 3

On considère la fonction $f : x \mapsto \operatorname{Arctan}\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)$

(1) $\operatorname{dom} f = \operatorname{dom}_c f = \operatorname{dom}_d f = \mathbb{R}^*$. ($f$ est une composée de fonctions continues et dérivables.)

(2) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \operatorname{Arctan}\left(1 - \dfrac{1}{x}\right) = \text{"}\operatorname{Arctan}(-\infty)\text{"} = -\dfrac{\pi}{2}$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \operatorname{Arctan}\left(1 - \dfrac{1}{x}\right) = \text{"}\operatorname{Arctan}(+\infty)\text{"} = \dfrac{\pi}{2}$

Donc $\mathcal{G}_f$ admet un saut d'amplitude $-\pi$ au point d'abscisse 0.

(3) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \operatorname{Arctan}\left(1 - \dfrac{1}{x}\right) = \operatorname{Arctan}(1) = \dfrac{\pi}{4}$.

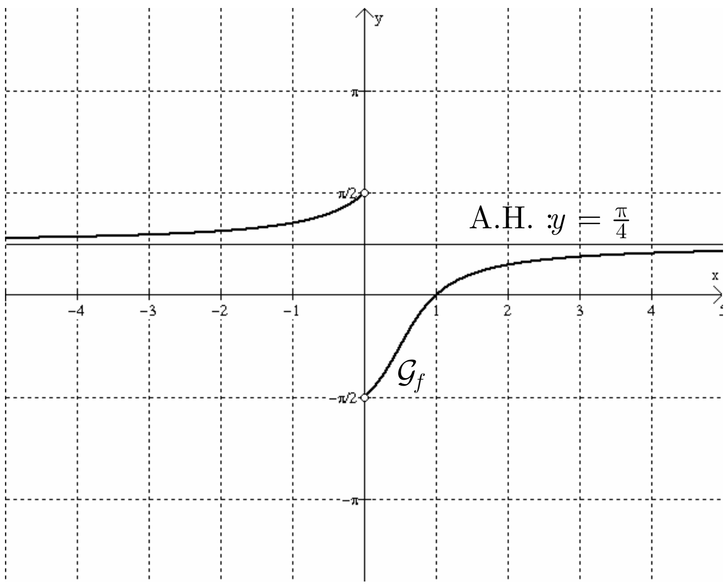
Donc $\mathcal{G}_f$ admet une asymptote horizontale à droite et à gauche : $y = \dfrac{\pi}{4}$.

(4) $(\forall x \in \mathbb{R}^*) \quad f'(x) = \dfrac{\dfrac{1}{x^2}}{1 + \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^2} = \dfrac{\dfrac{1}{x^2}}{1 + 1 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2}} = \dfrac{1}{2x^2 - 2x + 1}$.

On remarque que $f'(x)$ a toujours le signe de $2x^2 - 2x + 1$. Or le discriminant de ce trinôme est $-4 < 0$. Donc $f'(x) > 0$, quel que soit $x \neq 0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	//	$+$
$f(x)$	$\frac{\pi}{4} \nearrow \frac{\pi}{2}$	//	$-\frac{\pi}{2} \nearrow \frac{\pi}{4}$

(5) Représentation graphique :



G. Lorang