## Question 1

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on donne les points $A(1,-2,-4)$, $B(3,-1,0)$ et $C(-1,2,-5)$.

(1) Les points $A$, $B$ et $C$ sont alignés

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix} = k\cdot\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\4\\-1\end{pmatrix} \text{ avec } k\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2=-2k\\1=4k\\4=-k\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k=-1\\k=\frac{1}{4}\\k=-4\end{cases}$$

Impossible, donc $A$, $B$ et $C$ ne sont pas alignés.

(2) Une équation vectorielle du plan $ABC$ est : $\overrightarrow{AX} = h\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}$.

Il suffit de traduire cette équation analytiquement, en posant $X(x,y,z)$ :

$$\begin{pmatrix}x-1\\y+2\\z+4\end{pmatrix} = h\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix} + k\begin{pmatrix}-2\\4\\-1\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=1+2h-2k\\y=-2+h+4k \text{ avec } h,k\in\mathbb{R}\\z=-4+4h-k\end{cases}$$

(3) $D(5,-5,1)$ appartient au plan $ABC$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}5=1+2h-2k\\-5=-2+h+4k\\1=-4+4h-k\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}h-k=2 & (1)\\h+4k=-3 & (2)\\4h-k=5 & (3)\end{cases}$$

On résout le système formé par (1) et (2) :

(1) – (2) : $-5k=5 \Leftrightarrow k=-1$ (4)

(4) dans (1) : $h=1$ (5)

Vérifions si le système est compatible :

(4) et (5) dans (3) : $4\cdot 1-(-1)=5$.

Cette relation étant vraie, on peut conclure que le point $D(5,-5,1)$ appartient au plan $ABC$.

(4) Il suffit de vérifier que $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs directeurs non colinéaires du plan $ABC$, par exemple $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Or : $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 17 \cdot 2 + 6 \cdot 1 - 10 \cdot 4 = 34 + 6 - 40 = 0$.

et : $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 17 \cdot (-2) + 6 \cdot 4 - 10 \cdot (-1) = -34 + 24 + 10 = 0$.

Donc $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan $ABC$.

(5) On a :

$$\begin{aligned} & X(x,y,z) \in ABC \\ \Leftrightarrow\ & \overrightarrow{AX}\begin{pmatrix} x-1 \\ y+2 \\ z+4 \end{pmatrix} \cdot \vec{n}\begin{pmatrix} 17 \\ 6 \\ -10 \end{pmatrix} = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 17(x-1) + 6(y+2) - 10(z+4) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 17x + 6y - 10z - 45 = 0 \end{aligned}$$

Donc : $ABC \equiv 17x + 6y - 10z - 45 = 0$.

(6) $D(5,-5,1) \in ABC$ car $17 \cdot 5 + 6 \cdot (-5) - 10 \cdot 1 - 45 = 85 - 30 - 10 - 45 = 0$.

## Question 2

(1) $$\begin{aligned} \overrightarrow{AB}^2 = \left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}\right)^2 &= \overrightarrow{AM}^2 + 2\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB}^2 \\ &= \overline{AM}^2 + 2\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MB} + \overline{MB}^2 \end{aligned}$$

(2) $\overrightarrow{AC}^2 = \overline{AM}^2 + 2\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MC} + \overline{MC}^2$

(3) $2\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{AM} \cdot \left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right) = 2\overrightarrow{AM} \cdot \vec{0} = 0$

(4) $\overline{MB}^2 = \left(\dfrac{\overline{BC}}{2}\right)^2 = \dfrac{\overline{BC}^2}{4}$ et $\overline{MC}^2 = \left(\dfrac{\overline{BC}}{2}\right)^2 = \dfrac{\overline{BC}^2}{4}$.

(5) $$\begin{aligned} \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 &= \overline{AM}^2 + 2\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MB} + \overline{MB}^2 + \overline{AM}^2 + 2\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MC} + \overline{MC}^2 \\ &= 2\overline{AM}^2 + \Big(\underbrace{2\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MC}}_{0}\Big) + \frac{\overline{BC}^2}{4} + \frac{\overline{BC}^2}{4} \\ &= 2\overline{AM}^2 + \frac{\overline{BC}^2}{2} \end{aligned}$$

## Question 3

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

Donc : $\overline{AB} = \sqrt{4+16+9} = \sqrt{29}$

$\overline{AC} = \sqrt{25+4+0} = \sqrt{29}$

$\overline{BC} = \sqrt{9+4+9} = \sqrt{22}$

Le triangle $ABC$ est donc isocèle de sommet principal $A$.

$$\cos\widehat{A} = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\overline{AB}\cdot\overline{AC}} = \frac{10+8+0}{29} = \frac{18}{29} \Rightarrow \widehat{BAC} = \cos^{-1}\left(\frac{18}{29}\right) = 0{,}9012 \text{ rad}.$$

Comme $ABC$ est isocèle, les deux angles $\hat{B}$ et $\hat{C}$ sont égaux :

$$\hat{B} = \hat{C} = \frac{\pi - \hat{A}}{2} = 1{,}1202 \text{ rad}$$

G. Lorang