Question 1

a) C.E. pour f :

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1 \\ x^2+x-6 > 0 \end{cases}$$

On cherche les racines du trinôme x^2+x-6 :

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{25}}{2} = -3 \text{ et } x_2 = \frac{-1+\sqrt{25}}{2} = 2$$

On résout la 2e condition à l'aide d'un tableau du signe :

x	$-\infty$	–3		2	$+\infty$
x^2+x-6	+	0	–	0	+

Compte tenu de la 1re condition, on a donc : $\operatorname{dom} f =]2,+\infty[$.

b) C.E. pour g : $\dfrac{x+1}{x^2+x-6} \geq 0$

On résout cette condition à l'aide d'un tableau du signe :

x	$-\infty$	-3		1		2	$+\infty$
$x+1$	–		–	0	+		+
x^2+x-6	+	0	–		–	0	+
$\dfrac{x+1}{x^2+x-6}$	–	‖	+	0	–	‖	+

Donc $\operatorname{dom} g =]-3,1] \cup]2,+\infty[$.

Finalement $f \neq g$ car $\operatorname{dom} f \neq \operatorname{dom} g$.

Question 2

(1) $\operatorname{im} f =]-\infty,2]$ et $f(x) = 2-x^2$.

(2) f^{-1} est une fonction car f est injective. (En effet, f est strictement croissante sur son domaine, donc chaque y dans $\operatorname{im} f$ admet exactement un antécédent.)

On a : $\operatorname{dom} f^{-1} =]-\infty,2]$ et $\operatorname{im} f^{-1} = \mathbb{R}_-$.

Soit $y \in]-\infty,2]$.

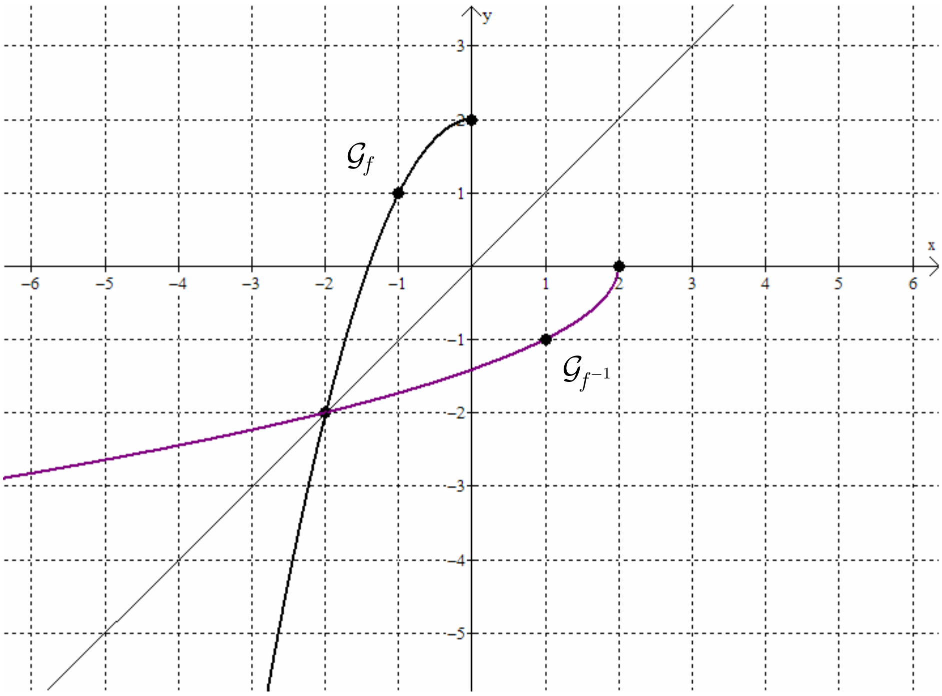
$$\begin{aligned} f(x) = y &\Leftrightarrow 2-x^2 = y \\ &\Leftrightarrow x^2 = 2-y \\ &\Leftrightarrow x = \sqrt{2-y} \text{ ou } x = -\sqrt{2-y} \end{aligned}$$

La solution négative est celle qui convient car $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}_-$. La solution positive est à exclure !

Donc :

$$f^{-1} :]-\infty, 2] \to \mathbb{R}_-$$
$$x \mapsto -\sqrt{2-x}$$

(3) Représentation graphique :



Question 3

(1) Il est évident que $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}_+$ et $\operatorname{dom} g = \mathbb{R} \setminus \{4\}$.

$$(g \circ f)(x) \text{ existe} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \operatorname{dom} f \\ f(x) \in \operatorname{dom} g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 16 \end{cases}$$

Donc : $\operatorname{dom}(g \circ f) = \mathbb{R}_+ \setminus \{16\}$.

$$(f \circ g)(x) \text{ existe} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \operatorname{dom} g \\ g(x) \in \operatorname{dom} f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 4 \\ \dfrac{1}{x-4} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x - 4 > 0 \Leftrightarrow x > 4$$

Donc : $\operatorname{dom}(g \circ f) =]4, +\infty[$

(2) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = \dfrac{1}{\sqrt{x} - 4}$ et

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = g\left(\dfrac{1}{x-4}\right) = \sqrt{\dfrac{1}{x-4}} = \dfrac{1}{\sqrt{x-4}}$.

Question 4 — 18 (=4+6+8) points

(1) La division euclidienne donne :

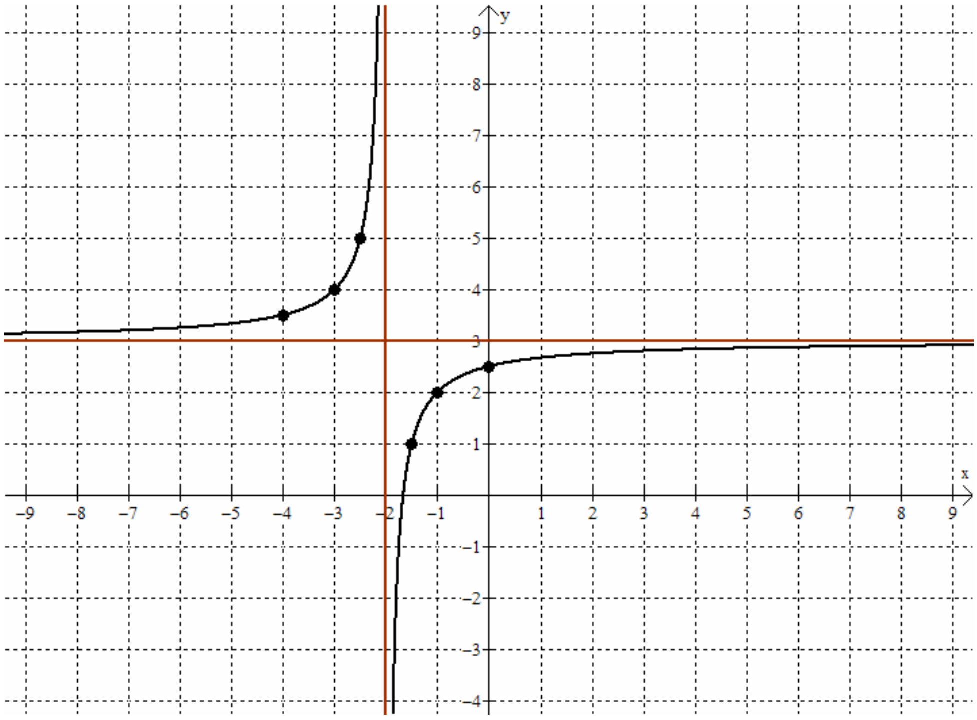
$$f(x) = \frac{-1}{x+2} + 3.$$

Donc : $k = -1$, $a = -2$ et $b = 3$.

(2) $\mathcal{G}_f$ est l'hyperbole de centre de symétrie $\Omega(-2,3)$ et d'équation

$$Y = \frac{-1}{X}$$

dans le repère orthonormé $\left(\Omega, \vec{i}, \vec{j}\right)$. L'asymptote horizontale à $\mathcal{G}_f$ est : $y = 3$, l'asymptote verticale à $\mathcal{G}_f$ est : $y = -2$.



(3) Graphiquement, on voit que f est injective car tout $y \neq 3$ a exactement 1 antécédent par f.

On a : $\operatorname{dom} f^{-1} = \operatorname{im} f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ et $\operatorname{im} f^{-1} = \operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Soit $y \neq 3$:

$$\begin{aligned} f(x) = y &\Leftrightarrow \frac{-1}{x+2} + 3 = y \\ &\Leftrightarrow \frac{-1}{x+2} = y - 3 \ / \cdot (-1) \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{x+2} = 3 - y \ /()^{-1} \\ &\Leftrightarrow x + 2 = \frac{1}{3-y} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{3-y} - 2 \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{3\} &\to \mathbb{R} \setminus \{-2\} \\ x &\mapsto \frac{1}{3-x} - 2 \end{aligned}$$

G. Lorang