a) $f : x \mapsto -x + 1 - \dfrac{3}{x-2}$

(1) $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

(2) ◆ $\lim\limits_{x \to 2^{\pm}} f(x) = -2 + 1 - "\dfrac{3}{0^{\pm}}" = -1 - (\pm\infty) = \mp\infty \Rightarrow$ A.V. : $x = 2$;

◆ $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = -(\pm\infty) + 1 - "\dfrac{3}{\pm\infty}" = \mp\infty + 1 - 0 = \mp\infty \Rightarrow$ pas d'A.H.

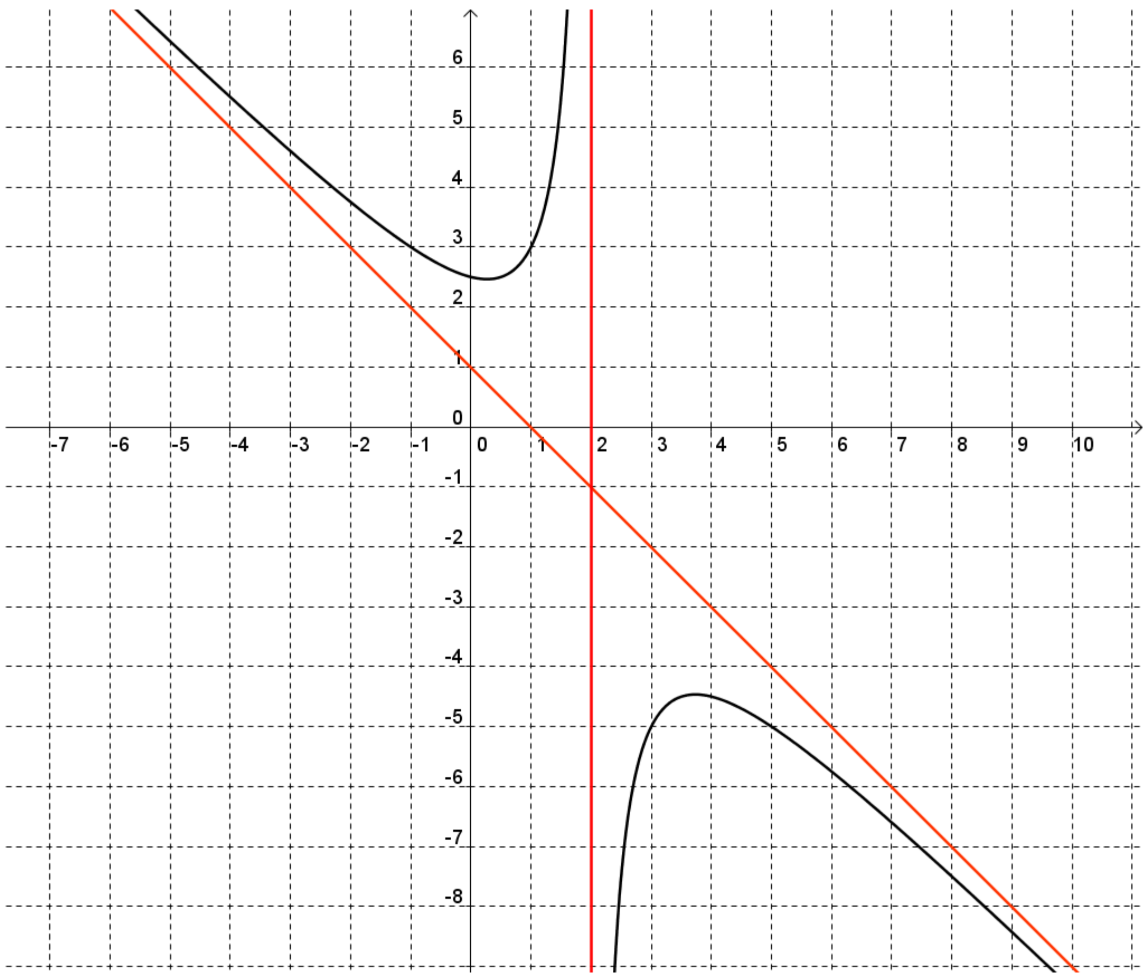
(3) $f(x)$ est de la forme $ax + b + \varepsilon(x)$ avec

$$a = -1,\ b = 1 \text{ et } \varepsilon(x) = -\frac{3}{x-2} \text{ et}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \varepsilon(x) = \lim_{x \to \pm\infty} -\frac{3}{x-2} = 0^{\mp}.$$

Donc $\mathcal{G}_f$ admet une A.O. $\Delta : y = -x + 1$ et $\mathcal{G}_f$ est situé en-dessous de Δ au voisinage de $+\infty$ et au-dessus de Δ au voisinage de $-\infty$.

(4) Représentation graphique correcte :



b) $f : x \mapsto \dfrac{2x^3 + x^2 - 3}{x^2 + x - 2}$

(1) C.E. : $x^2 + x - 2 \neq 0$, $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{1, -2\}$.

(2) On fait une étude du signe du dénominateur :

x	$-\infty$	-2		1	$+\infty$
$x^2 + x - 2$	$+$	0	$-$	0	$+$

◆ $\lim\limits_{x \to -2^{\pm}} f(x) = \dfrac{"-15"}{\mp\infty} = \pm\infty \Rightarrow$ A.V. : $x = -2$;

◆ $\lim\limits_{x \to 1} f(x) \to$ f.i $\dfrac{0}{0}$, donc on factorise le numérateur à l'aide du schéma de Horner. On obtient :

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 1} f(x) &= \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}\left(2x^2 + 3x + 3\right)}{\cancel{(x-1)}(x+2)} \\ &= \lim_{x \to 1} \frac{2x^2 + 3x + 3}{x + 2} \\ &= \frac{8}{3}\end{aligned}$$

I.G. : f est discontinue en 1 et $\mathcal{G}_f$ admet un trou en $\left(1, \frac{8}{3}\right)$.

◆ $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{2x^3}{x^2} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} 2x = \pm\infty \Rightarrow$ pas d'A.H.

(3) On observe que pour tout x du $\operatorname{dom} f$:

$$f(x) = \frac{2x^2 + 3x + 3}{x + 2}.$$

On fait la division euclidienne de $2x^2 + 3x + 3$ par $x + 2$ et on trouve :

$$f(x) = 2x - 1 + \frac{5}{x + 2}, \text{ si } x \neq 1 \text{ et } x \neq -2.$$

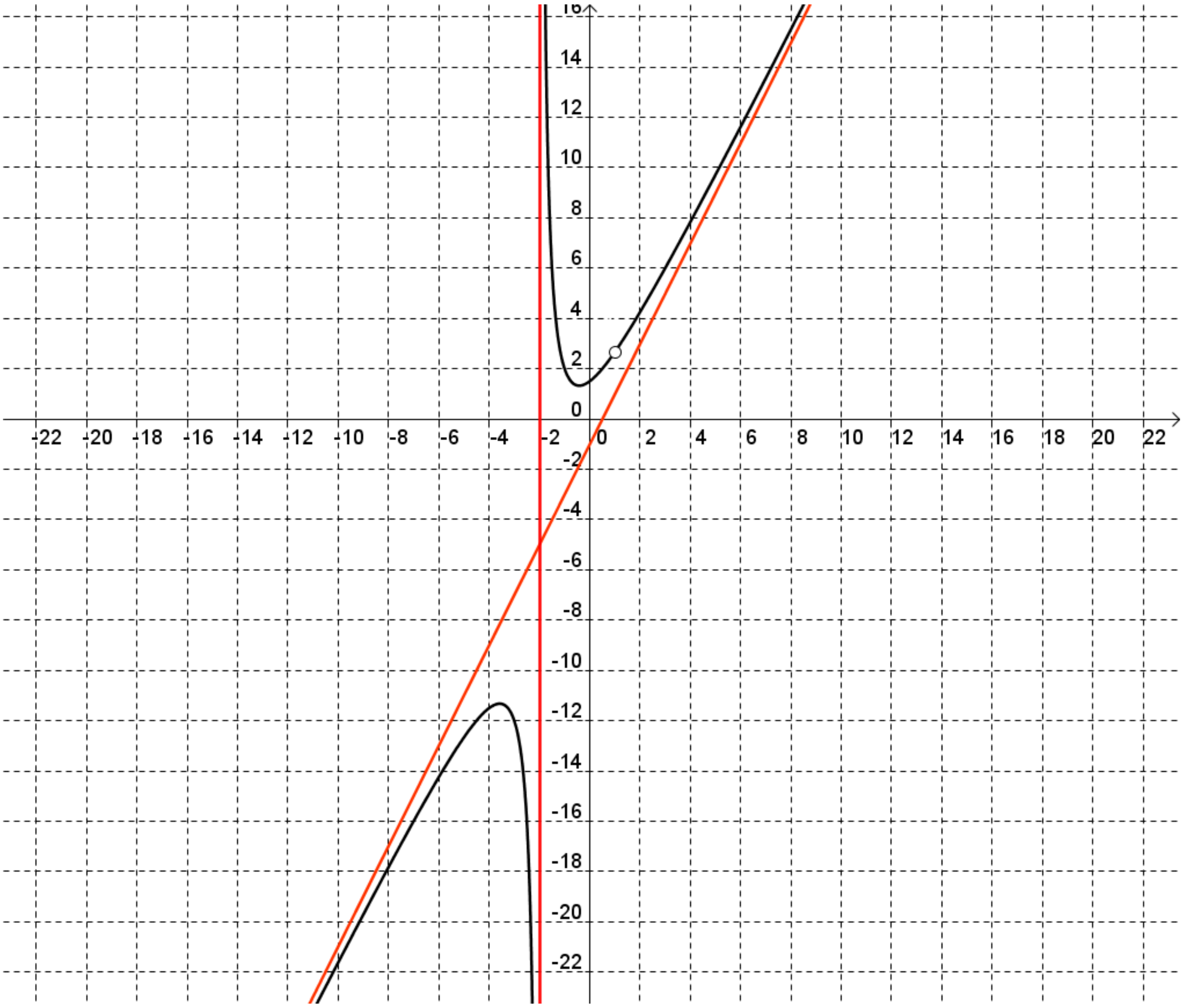
On voit donc que $f(x)$ est de la forme $ax + b + \varepsilon(x)$ avec

$$a = 2, \ b = -1 \text{ et } \varepsilon(x) = \frac{5}{x + 2} \text{ et}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \varepsilon(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{5}{x + 2} = 0^{\pm}.$$

Donc $\mathcal{G}_f$ admet une A.O. $\Delta : y = 2x - 1$ et $\mathcal{G}_f$ est situé au-dessus de Δ au voisinage de $+\infty$ et en-dessous de Δ au voisinage de $-\infty$.

(4) Représentation graphique correcte :



c) $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 2x - 8}$

(1) C.E. : $x^2 + 2x - 8 \geq 0$,

x	$-\infty$	-4		2	$+\infty$
$x^2 + 2x - 8$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\operatorname{dom} f =]-\infty, -4] \cup [2, +\infty[$.

(2)
- $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 0 = f(2) \Rightarrow f$ est continue (à droite) en 2 ;
- $\lim\limits_{x \to -4} f(x) = \lim\limits_{x \to -4^-} f(x) = 0 = f(-4) \Rightarrow f$ est continue (à gauche) en -4 ;
- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \sqrt{x^2} = +\infty \Rightarrow$ pas d'A.H.

(3) Formules de Cauchy :

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\pm x}{x} = \pm 1$$

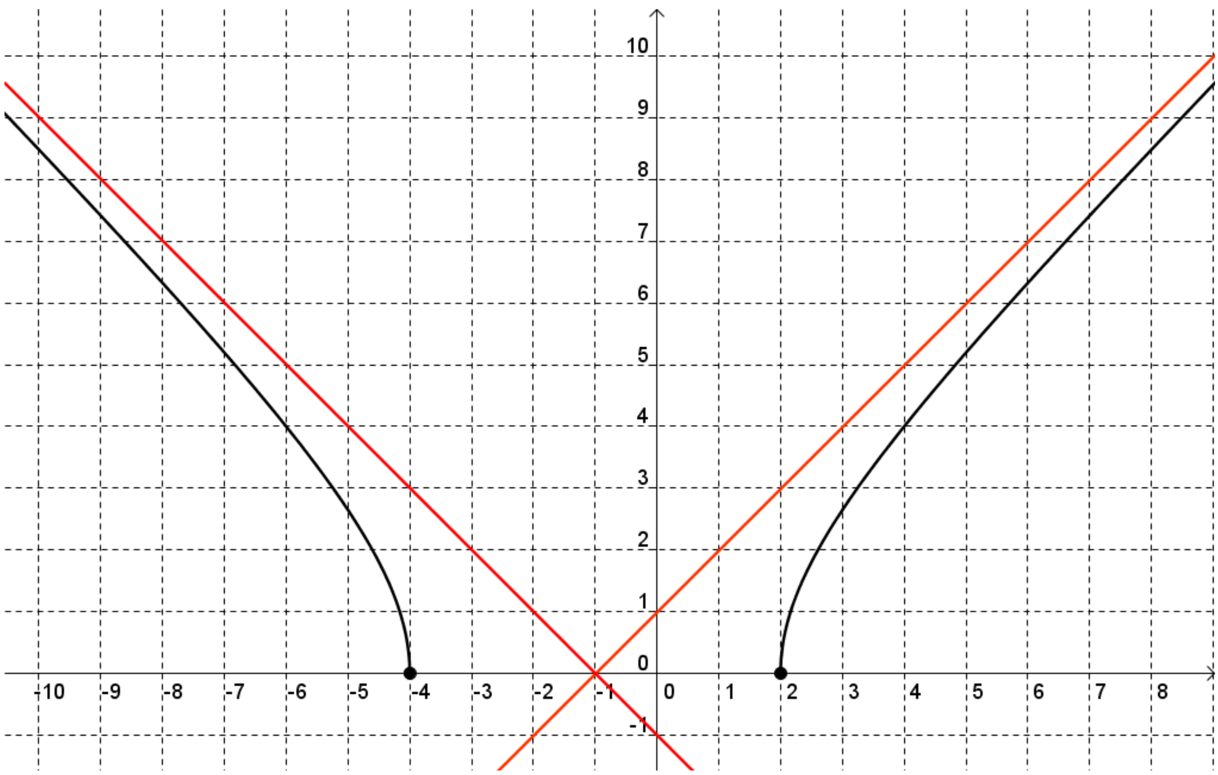
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} f(x) - x &= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2x-8} - x \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+2x-8}-x\right)\left(\sqrt{x^2+2x-8}+x\right)}{\sqrt{x^2+2x-8}+x} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+2x-8-x^2}{\sqrt{x^2}+x} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x-8}{2x} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Donc : A.O.D : $y = x + 1$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} f(x) - x &= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2x-8} + x \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+2x-8}+x\right)\left(\sqrt{x^2+2x-8}-x\right)}{\sqrt{x^2+2x-8}-x} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+2x-8-x^2}{\sqrt{x^2}-x} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x-8}{-2x} \\
&= -1
\end{aligned}$$

Donc : A.O.G : $y = -x - 1$.

(4) Représentation graphique correcte :



d) $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{4x+1}-3}$

(1) $\operatorname{dom} f = \left[-\frac{1}{4}, +\infty\right[\setminus \{2\}$. En effet :

$$\text{C.E. : } \begin{cases} x+2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2 \\ 4x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{4} \\ \sqrt{4x+1}-3 \neq 0 \Leftrightarrow \sqrt{4x+1} \neq 3 \Leftrightarrow 4x+1 \neq 9 \Leftrightarrow x \neq 2 \end{cases}$$

(2) ◆ $\displaystyle\lim_{x \to -\frac{1}{4}} f(x) = \lim_{x \to -\frac{1}{4}^+} f(x) = \frac{\sqrt{-\frac{1}{4}+2}-2}{-3} = \frac{\sqrt{\frac{7}{4}}-2}{-3} = \frac{4-\sqrt{7}}{6} = f\left(-\tfrac{1}{4}\right)$

$\Rightarrow f$ est continue (à droite) en $-\frac{1}{4}$.

◆ $$\begin{aligned} \lim_{x \to 2} f(x) &= \lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{4x+1}-3} \qquad \left(\text{f.i. } \frac{0}{0}\right) \\ &= \lim_{x \to 2} \frac{\left(\sqrt{x+2}-2\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)\left(\sqrt{4x+1}+3\right)}{\left(\sqrt{4x+1}-3\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)\left(\sqrt{4x+1}+3\right)} \\ &= \lim_{x \to 2} \frac{(x+2-4)\left(\sqrt{4x+1}+3\right)}{(4x+1-9)\left(\sqrt{x+2}+2\right)} \\ &= \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)\left(\sqrt{4x+1}+3\right)}{(4x-8)\left(\sqrt{x+2}+2\right)} \\ &= \lim_{x \to 2} \frac{\cancel{(x-2)}\left(\sqrt{4x+1}+3\right)}{4\cancel{(x-2)}\left(\sqrt{x+2}+2\right)} \\ &= \lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{4x+1}+3}{4\left(\sqrt{x+2}+2\right)} = \frac{6}{4 \cdot 4} = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

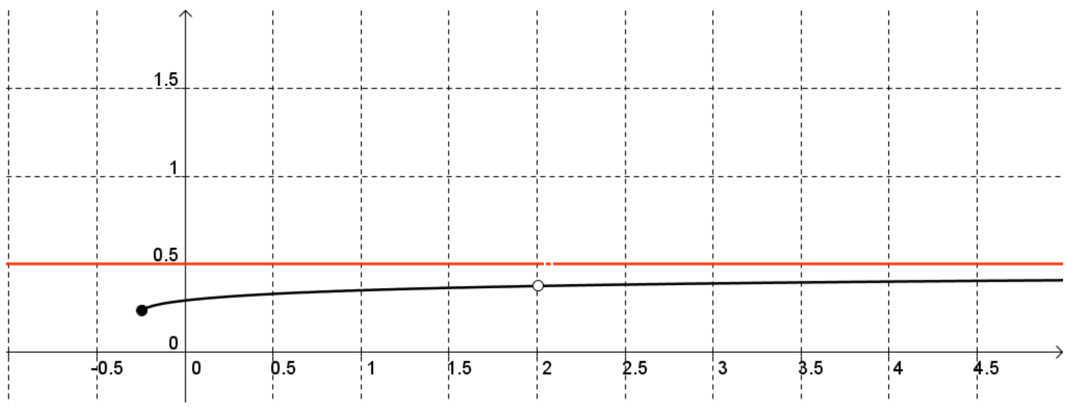
I.G. : f est discontinue en 2 et $\mathcal{G}_f$ admet un trou en $\left(2, \frac{3}{8}\right)$

◆ $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{4x+1}-3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{4x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{\sqrt{x}}}{2\cancel{\sqrt{x}}} = \frac{1}{2}$

Donc $\mathcal{G}_f$ admet une A.H.D. : $y = \dfrac{1}{2}$.

(3) Il n'y a pas d'A.O. (car il y a une A.H.)

(4) Représentation graphique correcte :



G. Lorang