2D — Corrigé du devoir de mathématiques II,1 — 27.01.09

Question 1

(1) $\operatorname{dom} f = \operatorname{dom}_c f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

(2) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

(3) $\lim\limits_{x \to -1^{\pm}} f(x) = \dfrac{4}{0^{\pm}} = \pm\infty$, donc A.V. : $x = -1$

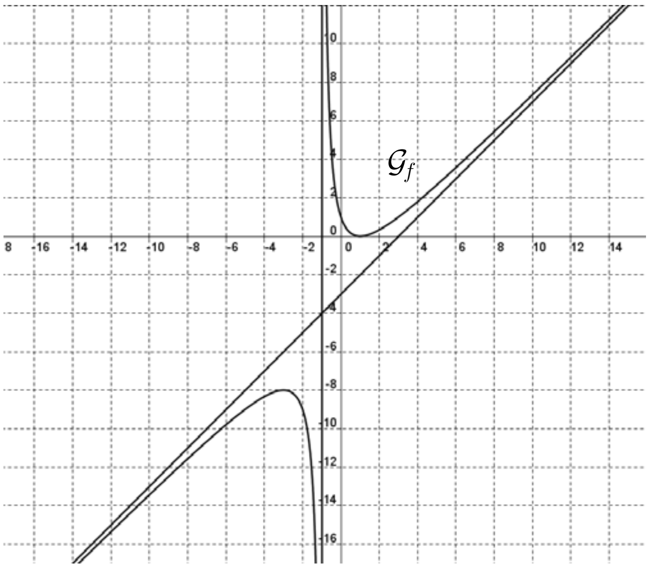
$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^2}{x} = \pm\infty$ donc pas d'A.H.

On effectue la division euclidienne du numérateur par le dénominateur et on trouve :

$$f(x) = x - 3 + \frac{4}{x+1}.$$

$f(x)$ est de la forme $ax + b + \varepsilon(x)$ avec $a = 1$, $b = -3$ et $\varepsilon(x) = \frac{4}{x+1}$. Comme $\lim_{x \to \pm\infty} \varepsilon(x) = 0^{\pm}$, on a une A.O. d'équation $y = x - 3$.

(4) On étudie le signe de $f(x) - (x-3) = \varepsilon(x)$. Or, le signe de $\varepsilon(x)$ est celui de $x + 1$. Donc, si $x > -1$, alors $\mathcal{G}_f$ est située au-dessus de l'A.O. et si $x < -1$, alors $\mathcal{G}_f$ est située en dessous de l'A.O.



(5) $\operatorname{dom}_d f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2(x-1)(x+1) - (x-1)^2 \cdot 1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{(x-1)(2x+2-x+1)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -3$.
- Le signe de $f'(x)$ est celui de $(x-1)(x+3)$.

TV :

x	$-\infty$	-3		-1		1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	-8 (M)	$\searrow$ $-\infty$	$\Vert$	$+\infty$ $\searrow$	0 (m)	$\nearrow$ $+\infty$

(6) Représentation graphique : ci-dessus.

Question 2

$g : x \mapsto \sqrt{|2x-5|}$.

(1) $\operatorname{dom} g = \operatorname{dom}_c g = \mathbb{R}$.

(2) On commence par écrire $g(x)$ sans valeur absolue :

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{2x-5} & \text{si } x \geq \frac{5}{2} \\ \sqrt{-2x+5} & \text{si } x \leq \frac{5}{2} \end{cases}$$

Donc :

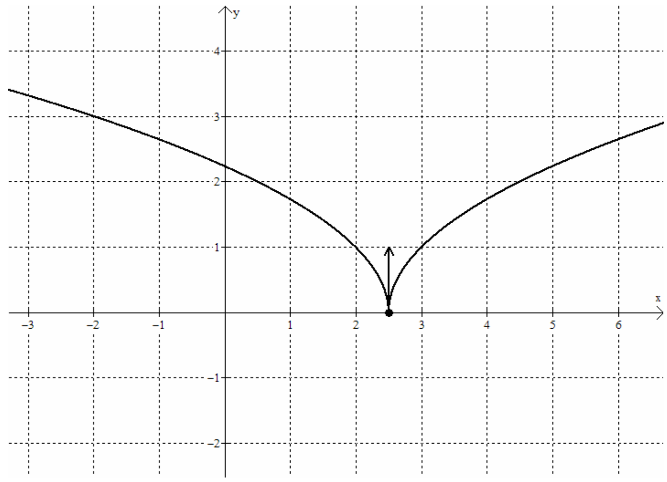
$$g'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2x-5}} & \text{si } x > \frac{5}{2} \\ \dfrac{-1}{\sqrt{-2x+5}} & \text{si } x < \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\cancel{g_g'\left(\tfrac{5}{2}\right)} = \lim_{x \to \frac{5}{2}^-} g'(x) = \text{"}\frac{-1}{0^+}\text{"} = -\infty \quad \text{et} \quad \cancel{g_d'\left(\tfrac{5}{2}\right)} = \lim_{x \to \frac{5}{2}^+} g'(x) = \text{"}\frac{1}{0^+}\text{"} = +\infty \,.$$

Donc g n'est pas dérivable en $\frac{5}{2}$, c.-à-d. $\operatorname{dom} g' = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5}{2}\right\}$.

$\mathcal{G}_g$ admet au point d'abscisse $\frac{5}{2}$ deux demi-tangentes verticales.

(3) Représentation graphique :



Le point $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ est un point de rebroussement.

Question 3

$$h : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{2\sqrt{x}}{3-x} & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{3}{4-x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

(1) Si $x < 1$, on a la C.E. $x \geq 0$ et si $x > 1$ on a la C.E. $x \neq 4$.

Donc : $\operatorname{dom} h = \mathbb{R}_+ \setminus \{4\}$.

(2) h est continue en tout réel de son domaine, sauf éventuellement en 1. Or,

$$\lim_{x \to 1^-} h(x) = \frac{2}{2} = 1 \text{ et } \lim_{x \to 1^+} h(x) = \frac{3}{3} = 1 = h(1) \,,$$

donc h est continue en 1. Finalement : $\operatorname{dom}_c h = \operatorname{dom} h = \mathbb{R}_+ \setminus \{4\}$.

(3) h est dérivable en tout point de son domaine de continuité, sauf éventuellement en 0 et en 1. Si $0 < x < 1$, on a :

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}(3-x) - 2\sqrt{x}(-1)}{(3-x)^2} \\ &= \frac{(3-x)+2x}{\sqrt{x}(3-x)^2} \\ &= \frac{3+x}{\sqrt{x}(3-x)^2} \end{aligned}$$

Donc :

$$\cancel{h'(0)} = \lim_{x\to 0} h'(x) = \text{"}\frac{3}{0^+}\text{"} = +\infty,$$

c.-à-d. h n'est pas dérivable en 0. De plus : $h_g'(1) = \lim\limits_{x\to 1^-} h'(x) = \frac{4}{4} = 1$.

Si $x > 1$, on a $h'(x) = \frac{3}{(4-x)^2}$. Donc :

$$h_d'(1) = \lim_{x\to 1^+} h'(x) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Comme $h_d'(1) \neq h_g'(1)$, on peut conclure que h n'est pas dérivable en 1.

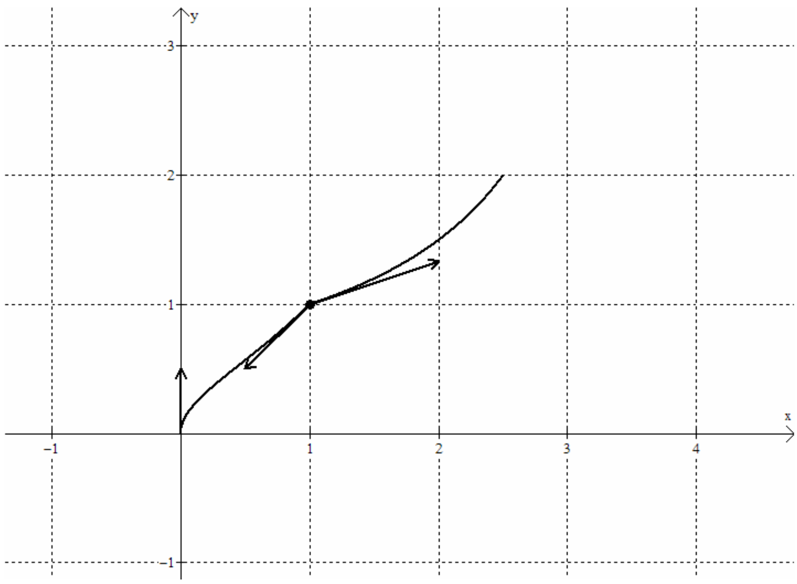
Finalement :

$$\operatorname{dom} h' = \mathbb{R}_+ \setminus \{0,1,4\}$$

et :

$$h'(x) = \begin{cases} \dfrac{3+x}{\sqrt{x}(3-x)^2} & \text{si } 0 < x < 1 \\ \dfrac{3}{(4-x)^2} & \text{si } x > 1 \text{ et } x \neq 4 \end{cases}$$

(4) Esquisse du graphe au voisinage des points d'abscisses 0 et 1 :



Le point (1,1) est un point anguleux.

Question 4

Soit la fonction $k : x \mapsto \dfrac{\sin x}{\cos 2x}$.

(1) C.E. : $\cos 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

k est continue et dérivable sur son domaine de définition, donc :

$$\operatorname{dom} k = \operatorname{dom}_c k = \operatorname{dom} k' = \mathbb{R} \setminus \left\{\tfrac{\pi}{4} + k\tfrac{\pi}{2} / k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

(2) Si $x \in \operatorname{dom} k'$, on a :

$$k'(x) = \frac{\cos x \cos(2x) + 2\sin x \sin(2x)}{\cos^2(2x)}$$

Donc : $k'(0) = \dfrac{1 + 2 \cdot 0}{1} = 1$.

D'où l'équation cartésienne de la tangente à $\mathcal{G}_k$ au point d'abscisse 0 :

$$y = k'(0)(x - 0) + k(0)$$
$$\Leftrightarrow y = x$$

G. Lorang