2D Corrigé du devoir II,2 17.02.09

Question 1

(1)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 5x-\cos 3x}{\sin 4x-\sin 3x}\overset{\text{f.i.}\frac{0}{0}}{\underset{H}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{-5\sin 5x+3\sin 3x}{4\cos 4x-3\cos 3x}=\frac{0}{1}=0$$

(2)
$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos 4x}\overset{\text{f.i.}\frac{0}{0}}{\underset{H}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{2x}{4\sin 4x}\overset{\text{f.i.}\frac{0}{0}}{\underset{H}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{2}{16\cos 4x}=\frac{1}{8}$$

(3)
$$\lim_{x\to -1}\frac{x^4-3x^2-2x}{x^4-1}\overset{\text{f.i.}\frac{0}{0}}{\underset{H}{=}}\lim_{x\to -1}\frac{4x^3-6x-2}{4x^3}=\frac{0}{-4}=0$$

(4)
$$\lim_{x\to 4}\frac{x-\sqrt{x}-2}{\sqrt{x-3}-1}\overset{\text{f.i.}\frac{0}{0}}{\underset{H}{=}}\lim_{x\to 4}\frac{1-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{2\sqrt{x-3}}}=\frac{1-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}$$

(5)
$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x-\tan x}\overset{\text{f.i.}\frac{0}{0}}{\underset{H}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{1-\left(1+\tan^2 x\right)}=-3\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\tan^2 x}=-3$$

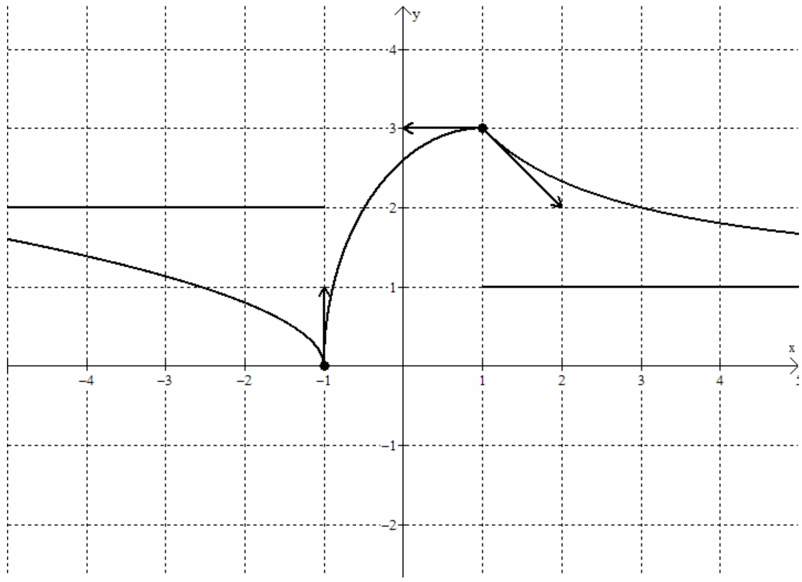
car

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}\overset{\text{f.i.}\frac{0}{0}}{\underset{H}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\tan^2 x}=1$$

Question 2

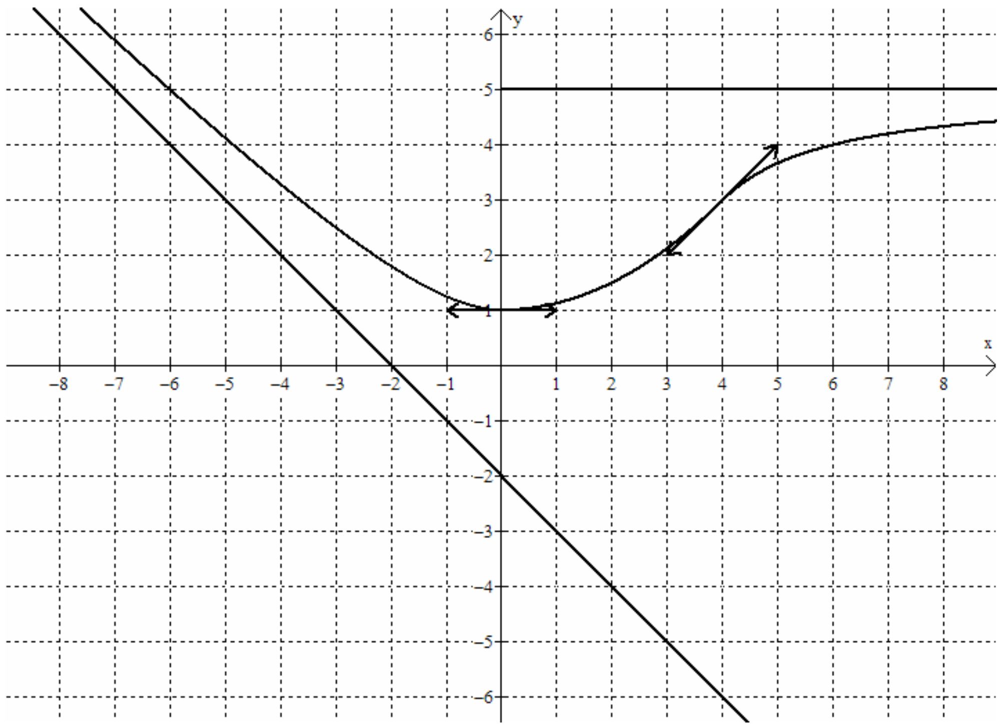
(1) Fonction f :

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$ $\quad -\infty$	//	$+\infty$ $\quad +$ $\quad 0$	//	-1 $\quad -$
$f''(x)$	$-$	//	$-$	//	$+$
$f(x)$	2 ↘	0 (m)	↗	3 (M)	↘ 1



(2) Fonction g :

x	$-\infty$	0		4	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	1	$+$
$g''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$+\infty$ A.O. : $y=-x-2$ ↘	1 (m)	↗	3 (P.I.)	↗ 5



Equation de la tangente à $\mathcal{G}_g$ au point d'abscisse 4 :

$$y = g'(4)(x-4)+g(4) \Leftrightarrow y = x-4+3 \Leftrightarrow y = x-1.$$

Question 3

(1) $\operatorname{dom} f = \operatorname{dom}_c f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

(2) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$.

(3) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{9x}{x^2} = 0$, donc A.H. : $y = 0$;

$\lim\limits_{x \to -2^{\pm}} f(x) = \dfrac{-9}{0^+} = -\infty$, donc A.V. : $x = -2$.

(4) $\operatorname{dom} f' = \operatorname{dom} f$

$f'(x) = \dfrac{-9x}{(x+2)^3}$

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $f'(x)$ a le signe de $-x \cdot (x+2)$

D'où le TV :

x	$-\infty$	-2		0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$
$f(x)$	0 $\searrow$ $-\infty$	$\Vert$	$-\infty$ $\nearrow$	$\frac{9}{4}$ (M)	$\searrow$ 0

(5) $\operatorname{dom} f'' = \operatorname{dom} f$ et $f''(x) = \dfrac{18(x-1)}{(x+2)^4}$

$f''(x)$ a le signe de $x - 1$, donc il y a un point d'inflexion au point d'abscisse 1 et d'ordonnée est $f(1) = 2$.

x	$-\infty$	-2		1	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\frown$	$\Vert$	$\frown$	P.I. (1,2)	$\smile$

(6) Coefficient angulaire de la tangente à $\mathcal{G}_f$ au point d'inflexion : $f'(1) = -\frac{1}{3}$.

(7) Représentation graphique :