1^re partie : sans V200 (30 minutes)

Question 1 — 8 (=3+5) points

Calculer les limites suivantes en utilisant la règle de l'Hôpital :

(1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\sin x}{x^3}$ (2) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{3\sqrt{2x+3}-x-6}{(x-3)^2}$

Question 2 — 12 (=2+2+1+7) points

Voici le tableau de variation incomplet de la fonction f :

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-\frac{1}{2}$	$-$	0	$+$ $\frac{1}{2}$	$\Vert$	$-\infty$ $-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$\Vert$	$+$
$f(x)$	2	1		$\frac{2}{3}$		1	A.O. : $y = 1 - x$
$\mathcal{G}_f$							

(1) Compléter ce tableau par les variations de f et la concavité de $\mathcal{G}_f$.

(2) Préciser la nature des points d'abscisses –1, 0 et 1.

(3) Donner l'équation de la tangente à $\mathcal{G}_f$ au point d'abscisse –1.

(4) Esquisser de façon aussi précise que possible le graphe de f dans un repère orthonormé en prenant comme ***unité 2 cm***.

2^e partie : avec V200 (70 minutes)

Remarque : Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées !

Question 3 — 20 (=10+4+2+4) points

(1) Démontrer qu'il existe un polynôme unique du 4^e degré p tel que :

a) p a un minimum égal à -2 en $x = -1$;

b) p a un maximum égal à 3 en $x = 1$;

c) Le graphe de p passe par l'origine.

(2) Le polynôme p admet-il un 3^e extrémum ? Dans l'affirmative, préciser les coordonnées et la nature de cet extrémum.

(3) Quels sont les racines de la fonction p ?

(4) Représenter graphiquement p dans un repère bien choisi en tenant compte des informations obtenues aux questions précédentes.

Question 4 — 20 (=12+3+5) points

On considère les trois droites

$d_1 : y = x + 1$,

$d_2 : y = -2x + 4$ et

$d_3 : y = 3x + 3$.

(1) Montrer qu'il existe une parabole unique $\mathcal{P}$ d'axe vertical et tangente aux trois droites d_1, d_2 et d_3. Déterminer les coordonnées des points de contact de la parabole et des droites.

(2) Déterminer le sommet de la parabole $\mathcal{P}$.

(3) Représenter graphiquement la parabole $\mathcal{P}$ et les trois droites d_1, d_2 et d_3 dans un repère orthonormé en prenant comme unité 2,5 cm.

G. Lorang