Question 1

Calculer les limites suivantes en utilisant la règle de l'Hôpital :

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{6x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{6}=\dfrac{1}{6}$

(2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3\sqrt{2x+3}-x-6}{(x-3)^2}\overset{\text{f.i.}\frac{0}{0}}{\underset{H}{=}}\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3(2x+3)^{-\frac{1}{2}}-1}{2(x-3)}\overset{\text{f.i.}\frac{0}{0}}{\underset{H}{=}}\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{-3(2x+3)^{-\frac{3}{2}}}{2}=-\dfrac{1}{18}$

Question 2

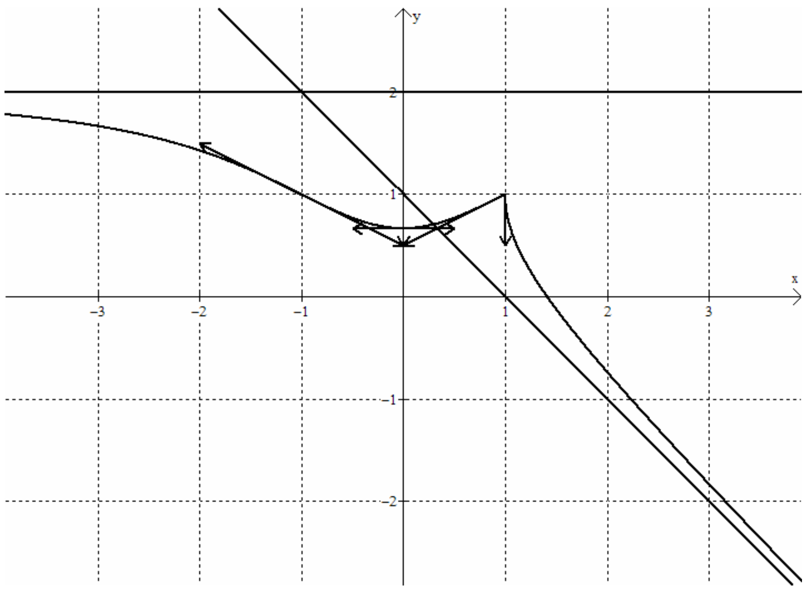
x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-\frac{1}{2}$	$-$	0	$+$ $\frac{1}{2}$	$\vert\vert$	$-\infty$ $-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$\vert\vert$	$+$
$f(x)$	2 $\searrow$	1	$\searrow$	$\frac{2}{3}$ (m)	$\nearrow$	1 (M)	$\searrow$ A.O. : $y=1-x$
$\mathcal{G}_f$		P.I.		MIN		MAX & ANG.	

(1) Voir ci-dessus.

(2) Voir ci-dessus.

(3) $t_{-1}: y=-\frac{1}{2}(x+1)+1 \Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$.

(4)



Question 3

(1) Soit $p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ le polynôme cherché. On a les conditions nécessaires :

$$\begin{cases} p(0) = 0 \\ p(-1) = -2 \text{ et } p'(-1) = 0 \\ p(1) = 3 \text{ et } p'(1) = 0 \end{cases}$$

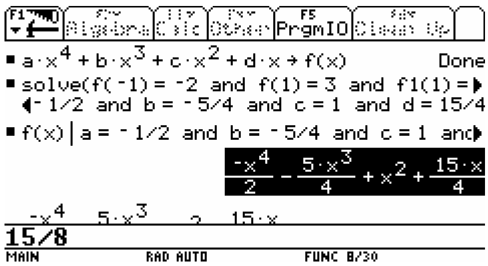
On résout ce système d'inconnues a, b, c, d et e avec la V200 et on trouve :

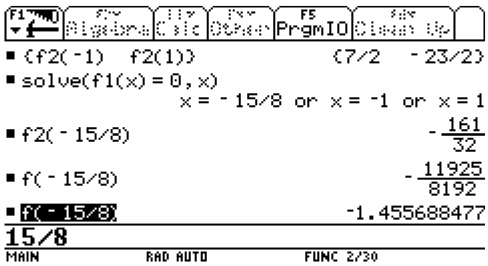
$$p(x) = -\frac{1}{2}x^4 - \frac{5}{4}x^3 + x^2 + \frac{15}{4}x$$

Comme $p''(-1) = -\frac{7}{2} > 0$, $(-1,-2)$ est bien un minimum.

Comme $p''(1) = -\frac{23}{2} < 0$, $(1,3)$ est bien un maximum.

Ceci démontre l'existence et l'unicité du polynôme cherché.

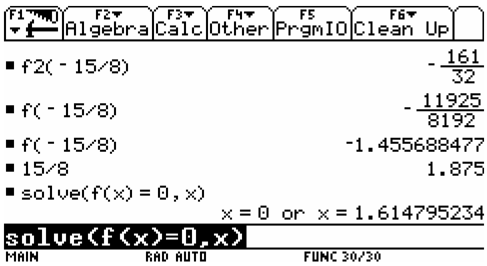




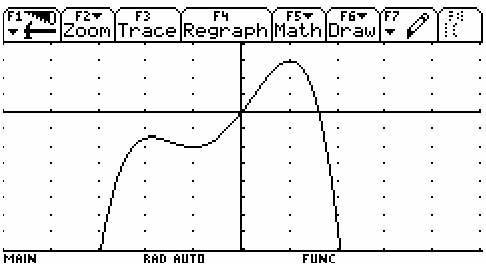
(2) On a : $p'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 1$ ou $x = -\frac{15}{8}$.

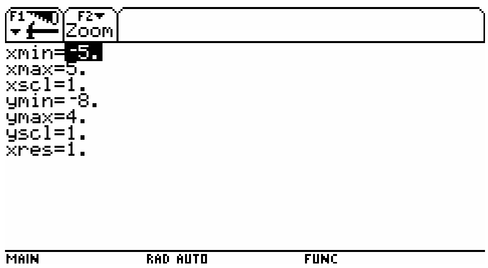
De plus : $p''\left(-\frac{15}{8}\right) = -\frac{161}{32} < 0$, donc p admet un 3^{e} extrémum au point d'abscisse $-\frac{15}{8}$ et c'est un maximum. Les coordonnées de ce maximum sont : $\left(-\frac{15}{8}, -\frac{11'925}{8'192}\right) \simeq (-1{,}875; -1{,}46)$.

(3) La V200 donne : $p(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1{,}6148$ (val. approchée)



(4) Repr. graphique :

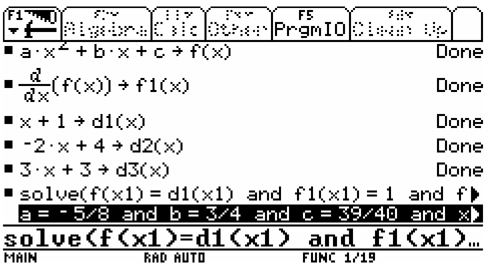


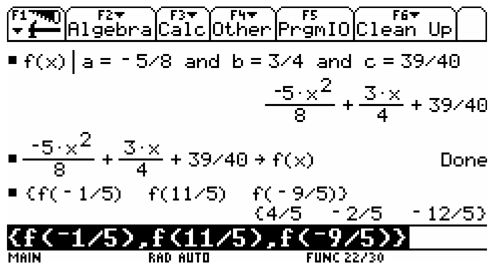


Question 4

(1) Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ la fonction dont le graphe est la parabole cherchée et soit x_1, x_2 et x_3 les abscisses des points de contact des droites d_1, d_2 et d_3 avec $\mathcal{P}$. On a les conditions nécessaires et suffisantes :

$$\begin{cases} f(x_1) = x_1 + 1 \text{ et } f'(x_1) = 1 \\ f(x_2) = -2x_2 + 4 \text{ et } f'(x_2) = -2 \\ f(x_3) = 3x_3 + 3 \text{ et } f'(x_3) = 3 \end{cases}$$





On trouve à l'aide de la V200 la solution unique :

$$f(x) = -\frac{5}{8}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{39}{40}$$

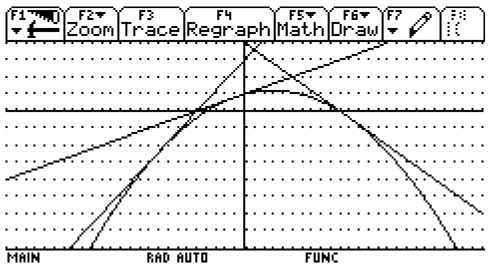
et $x_1 = -\frac{1}{5}$, $x_2 = \frac{11}{5}$ et $x_3 = -\frac{9}{5}$.

D'où les points de contact : $C_1\left(-\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right)$, $C_2\left(\frac{11}{5}, -\frac{2}{5}\right)$ et $C_3\left(-\frac{9}{5}, -\frac{12}{5}\right)$.

(2) Le sommet de la parabole $\mathcal{P}$ est le point d'abscisse :

$$-\frac{b}{2a} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}} = \frac{3}{5}$$

D'où le sommet : $S\left(\frac{3}{5}, \frac{6}{5}\right)$



(3) Représentation graphique :