2D1	Corrigé du devoir III,1	28.04.09

Question 1

(1) a) Relation fondamentale : $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$

$$\cos^2\alpha=\tfrac{8}{9}\Leftrightarrow\cos\alpha=-\tfrac{2\sqrt{2}}{3}$$

car α est un angle du 2e quadrant.

$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$ et $\cot\alpha=-2\sqrt{2}$

b) $\cos^{-1}\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\cong 2{,}802\Rightarrow\alpha\cong 2{,}802+k\cdot 2\pi$ rad.

c) Figure corrigée au tableau.

(2) a) Comme β est un angle du 3e quadrant, on sait que $\cos\beta<0$ et $\sin\beta<0$. Donc :

- $\cos^2\beta=\frac{1}{1+\tan^2\beta}\Leftrightarrow\cos^2\beta=\frac{1}{1+\frac{16}{9}}\Leftrightarrow\cos^2\beta=\frac{9}{25}$, $\Leftrightarrow\cos\beta=-\frac{3}{5}$
- $\sin^2\beta=\frac{\tan^2\beta}{1+\tan^2\beta}\Leftrightarrow\sin^2\beta=\frac{\frac{16}{9}}{1+\frac{16}{9}}\Leftrightarrow\sin^2\beta=\frac{16}{25}$ $\Leftrightarrow\sin\beta=-\frac{4}{5}$
- $\cot\beta=\frac{\cos\beta}{\sin\beta}=\frac{3}{4}$

b) $\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)+\pi\cong 4{,}069\Rightarrow\beta\cong 4{,}069+k\cdot 2\pi$ rad.

c) Figure corrigée au tableau.

Question 2

(1) Voir cahier. On trouve $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

(2) $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$. Donc :

$$\begin{aligned}\cos\tfrac{\pi}{12}&=\cos\left(\tfrac{\pi}{3}-\tfrac{\pi}{4}\right)\\&=\cos\tfrac{\pi}{3}\cos\tfrac{\pi}{4}+\sin\tfrac{\pi}{3}\sin\tfrac{\pi}{4}\\&=\tfrac{1}{2}\tfrac{\sqrt{2}}{2}+\tfrac{\sqrt{3}}{2}\tfrac{\sqrt{2}}{2}\\&=\tfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\sin\tfrac{\pi}{12}&=\sin\left(\tfrac{\pi}{3}-\tfrac{\pi}{4}\right)\\&=\sin\tfrac{\pi}{3}\cos\tfrac{\pi}{4}-\cos\tfrac{\pi}{3}\sin\tfrac{\pi}{4}\\&=\tfrac{\sqrt{3}}{2}\tfrac{\sqrt{2}}{2}-\tfrac{1}{2}\tfrac{\sqrt{2}}{2}\\&=\tfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

(3) On trouve 2 fois : $\cos\frac{\pi}{12}\cong 0{,}965926$ et $\sin\frac{\pi}{12}\cong 0{,}25882$.

Question 3 — 11 (=2+3+6) points

(1) a est un angle du 1er quadrant, car $\cos a>0$ et $\sin a>0$.

(2) Comme b est un angle du 4e quadrant, $\sin b<0$. La relation fondamentale donne : $\sin b=-\frac{1}{\sqrt{5}}$.

(3) $$\begin{aligned}\cos(a+b)&=\cos a\cos b-\sin a\sin b\\&=\tfrac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}\tfrac{2}{\sqrt{5}}+\tfrac{2\sqrt{3}+1}{2\sqrt{5}}\tfrac{1}{\sqrt{5}}\\&=\tfrac{4-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}+1}{10}\\&=\tfrac{5}{10}=\tfrac{1}{2}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\sin(a+b)&=\sin a\cos b+\cos a\sin b\\&=\tfrac{2\sqrt{3}+1}{2\sqrt{5}}\tfrac{2}{\sqrt{5}}-\tfrac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}\tfrac{1}{\sqrt{5}}\\&=\tfrac{4\sqrt{3}+2-2+\sqrt{3}}{10}\\&=\tfrac{5\sqrt{3}}{10}=\tfrac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

On en déduit que $a+b=\frac{\pi}{3}+k\cdot 2\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

Question 4

(1) $\sin 3x = \sin(2x + x)$

$= \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x$

$= 2\sin x \cos^2 x + \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)\sin x$

$= 2\sin x\left(1 - \sin^2 x\right) + \left(1 - \sin^2 x - \sin^2 x\right)\sin x$

$= 2\sin x - 2\sin^3 x + \sin x - 2\sin^3 x$

$= 3\sin x - 4\sin^3 x$

(2) Voir cahier : ex 407 p.421

Problème V200 10 points

Soit $f : x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d + e$ le polynôme cherché.

Les conditions nécessaires (mais pas suffisantes) sont :

$$\begin{cases} f''(2) = 0 \\ f(2) = 1 \\ f'(4) = 1 \\ f'(1) = 0 \end{cases}$$

On résoud ce système à l'aide de la V200 et on trouve un candidat unique comme solution :

$$f(x) = \tfrac{1}{9}x^3 - \tfrac{2}{3}x^2 + x + \tfrac{7}{9}.$$

Or : $f''(1) = -\frac{2}{3} < 0$. Donc f admet un maximum en 1 et pas un minimum. En d'autres termes, le polynôme cherché n'existe pas.

G. Lorang