Question 1

(1) $\cos x + \cos 3x + 2\cos 2x = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos 2x \cos(-x) + 2\cos 2x = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos 2x(\cos x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow \cos 2x = 0 \text{ ou } \cos x = -1$

$\Leftrightarrow 2x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \text{ ou } x = \pi + k\cdot 2\pi$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2} \text{ ou } x = \pi + k\cdot 2\pi$

$$S = \left\{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, \pi + k\cdot 2\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

(2) $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos x$

$\Leftrightarrow \cos 2x = \cos x$

$\Leftrightarrow 2x = x + k\cdot 2\pi \text{ ou } 2x = -x + k\cdot 2\pi$

$\Leftrightarrow x = k\cdot 2\pi \text{ ou } 3x = k\cdot 2\pi$

$\Leftrightarrow x = k\cdot 2\pi \text{ ou } x = k\cdot \dfrac{2\pi}{3}$

$\Leftrightarrow x = k\cdot \dfrac{2\pi}{3}$

$$S = \left\{k\cdot\frac{2\pi}{3} \,/\, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

(3) $\tan\beta = 4 - 3\cot\beta$ C.E. : $x \neq k\cdot\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

On transforme l'équation en :

$$\tan\beta = 4 - \frac{3}{\tan\beta} \,/\cdot \tan\beta$$

$$\Leftrightarrow \tan^2\beta - 4\tan\beta + 3 = 0$$

On pose : $y = \tan\beta$ et on trouve une équation du 2^e degré :

$y^2 - 4y + 3 = 0$, dont les racines sont 1 et 3.

Donc :

$$\tan\beta = 1 \text{ ou } \tan\beta = 3$$

$$\Leftrightarrow \beta = \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ ou } \beta \cong 1{,}25 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$S = \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi \,;\, 1{,}25 + k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Question 2

(1) $f(x+2\pi)=\sin(2x+4\pi)\cos(x+2\pi)=\sin(2x)\cos x=f(x)$, donc f est périodique de période 2π. Il suffit donc d'étudier f sur un intervalle de longueur 2π, par exemple $[-\pi,\pi]$.

$f(-x)=\sin(-2x)\cos(-x)=-\sin(2x)\cos x=-f(x)$, donc f est impaire. Il suffit donc d'étudier f sur $\mathbb{R}_+$. Vu la périodicité, il suffit d'étudier f sur $[0,\pi]$.

(2) Pour tout réel x : $f'(x)=2\cos 2x\cos x-\sin 2x\sin x$

$$\begin{aligned}
&=2\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)\cos x-2\sin x\cos x\sin x\\
&=2\cos^3 x-2\sin^2 x\cos x-2\sin^2 x\cos x\\
&=2\cos^3 x-4\sin^2 x\cos x\\
&=\cos x\left(2\cos^2 x-4\sin^2 x\right)\\
&=\cos x\left[1+\cos 2x-2(1-\cos 2x)\right]\\
&=\cos x\cdot(-1+3\cos 2x)
\end{aligned}$$

(3) $f'(x)=0\Leftrightarrow \cos x=0$ ou $\cos 2x=\dfrac{1}{3}$

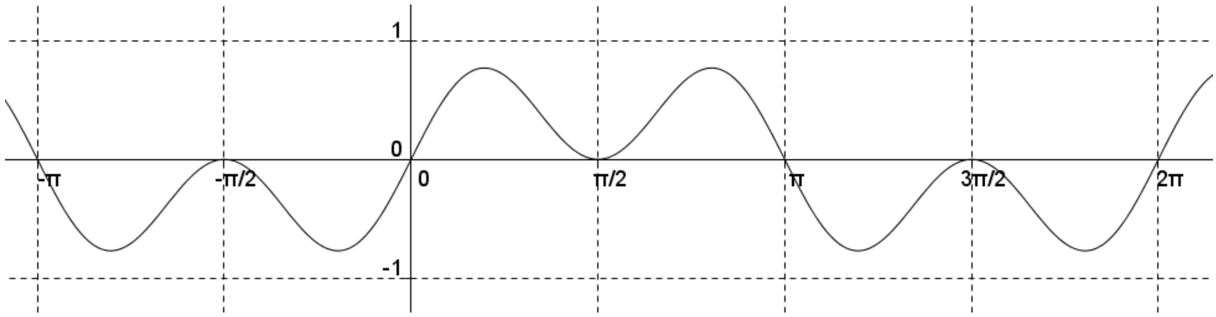
$\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ ou $2x\simeq 1{,}23+k\cdot 2\pi$ ou $2x\simeq -1{,}23+k\cdot 2\pi$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ ou $x\simeq 0{,}615+k\pi$ ou $x\simeq -0{,}615+k\pi$

Les solutions dans $[0,\pi]$ sont : $\dfrac{\pi}{2}$; $0{,}615$ et $-0{,}615+\pi\cong 2{,}53$.

x	0	0,615		$\frac{\pi}{2}$		2,53	π
$f'(x)$	2 +	0	−	0	+	0	− −2
$f(x)$	0 ↗	0,77 (M)	↘	0 (m)	↗	0,77 (M)	↘ 0

(4) Représentation graphique :



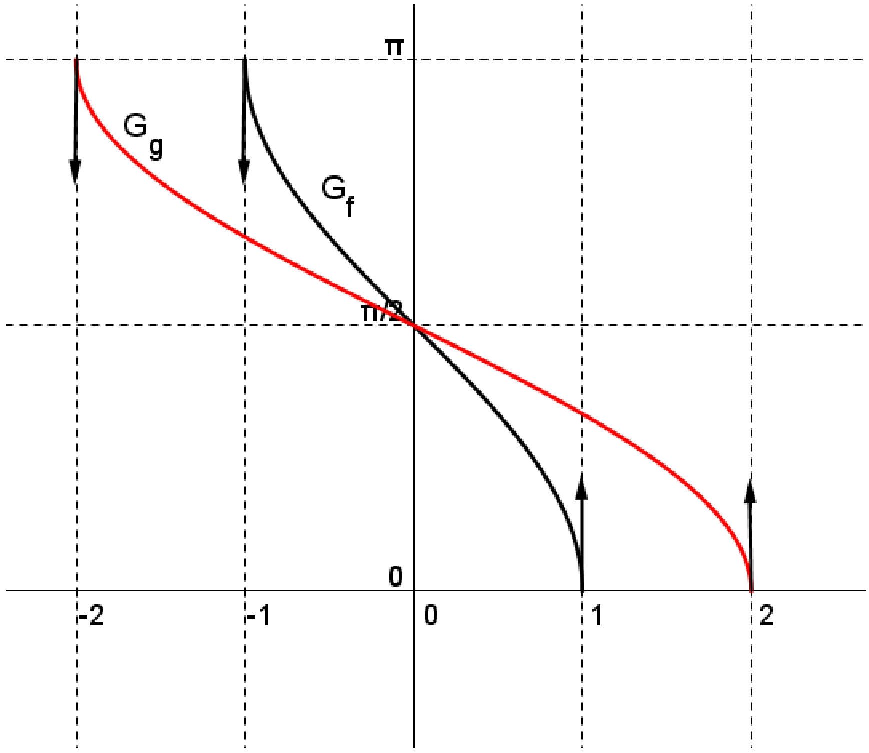
Question 3

(1) $\operatorname{Arctan} x = y \Leftrightarrow x = \tan y$ et $-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$

(2) Voir manuel.

(3) $f : x \mapsto \operatorname{Arccos} x$ et $g : x \mapsto \operatorname{Arccos}\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

On passe de $\mathcal{G}_f$ à $\mathcal{G}_g$ en multipliant les abscisses par 2.



G. Lorang