2D1	Corrigé du devoir III,3	30.06.09

Question 1

(1) Le déterminant du système est :

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

Ce déterminant étant non nul, le système admet toujours une solution unique (x,y).

(2) $\Delta_x = \begin{vmatrix} \cos 2\alpha & -\sin\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$ $\qquad$ $\Delta_y = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos 2\alpha \\ \sin\alpha & \sin 2\alpha \end{vmatrix}$

$= \cos 2\alpha\cos\alpha + \sin 2\alpha \sin\alpha$ $\qquad$ $= \sin 2\alpha\cos\alpha - \cos 2\alpha\sin\alpha$

$= \cos(2\alpha - \alpha) = \cos\alpha$ $\qquad$ $= \sin(2\alpha-\alpha) = \sin\alpha$

D'où : $S = \{(\cos\alpha, \sin\alpha)\}$.

Question 2

(1) Le déterminant du système est :

$$\Delta = \begin{vmatrix} m & 2 \\ 1 & m-1 \end{vmatrix} = m^2 - m - 2 = (m+1)(m-2).$$

On a : $\Delta = 0 \Leftrightarrow m = -1$ ou $m = 2$.

<u>1er cas</u> : $\boxed{m=-1}$. Alors le système s'écrit :

$$\begin{cases} -x+2y=-2 \\ x-2y=2 \end{cases} \Leftrightarrow x-2y=2 \Leftrightarrow x = 2y+2$$

Donc : $S = \{(2y+2, y) \,/\, y\in\mathbb{R}\}$.

I.G. : Les équations du système sont celles de deux droites confondues du plan.

<u>2e cas</u> : $\boxed{m=2}$. Alors le système s'écrit :

$$\begin{cases} 2x+2y=1 \\ x+y=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=\frac{1}{2} \\ x+y=-4 \end{cases}, \text{ impossible}$$

Donc : $S = \varnothing$.

I.G. : Les équations du système sont celles de deux droites strictement parallèles du plan.

<u>3e cas</u> : $\boxed{m\neq -1 \text{ et } m\neq 2}$.

Alors $\Delta \neq 0$ et le système admet une solution unique.

$\Delta_x = \begin{vmatrix} m-1 & 2 \\ -2m & m-1 \end{vmatrix}$ $\qquad$ $\Delta_y = \begin{vmatrix} m & m-1 \\ 1 & -2m \end{vmatrix}$

$= (m-1)^2 + 4m$ $\qquad$ $= -2m^2 - m + 1$

$= m^2 + 2m + 1$ $\qquad$ $= -2(m+1)(m-\frac{1}{2})$

$= (m+1)^2$ $\qquad$ $= (m+1)(1-2m)$

Donc : $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} = \dfrac{(m+1)^2}{(m+1)(m-2)} = \dfrac{m+1}{m-2}$ et

$y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} = \dfrac{(m+1)(1-2m)}{(m+1)(m-2)} = \dfrac{1-2m}{m-2}$

$$S = \left\{\left(\frac{m+1}{m-2}, \frac{1-2m}{m-2}\right)\right\}$$

I.G. : Les équations du système sont celles de deux droites sécantes du plan.

(2) Si $m = 3$, on a : $S = \{(4,-5)\}$.

Question 3

(1) $\overrightarrow{AB}(-3,1,2)$ et $\overrightarrow{AC}(1,4,1)$.

$$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 = k \\ 1 = 4k \\ 2 = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -3 \\ k = \frac{1}{4} \\ k = 2 \end{cases} \text{, impossible !}$$

Donc A, B et C ne sont pas alignés.

(2) $\overrightarrow{AB}(-3,1,2)$ et $\overrightarrow{CD}(1,2,-1)$.

$$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 = k \\ 1 = 2k \\ 2 = -k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -3 \\ k = \frac{1}{2} \\ k = -2 \end{cases} \text{, impossible !}$$

Donc d et d' ne sont pas parallèles car $\overrightarrow{AB} \not\parallel \overrightarrow{CD}$.

(3) $d \begin{cases} x = 2 - 3k \\ y = 3 + k \\ z = -1 + 2k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R}) \qquad d' \begin{cases} x = 3 + l \\ y = 7 + 2l \\ z = -l \end{cases} \quad (l \in \mathbb{R})$

(4) On a :

$$d \cap d' \begin{cases} x = 2 - 3k = 3 + l \\ y = 3 + k = 7 + 2l \\ z = -1 + 2k = -l \qquad (*) \end{cases}$$

On résout d'abord le système suivant afin de déterminer k et l :

$$\begin{cases} 2 - 3k = 3 + l \\ 3 + k = 7 + 2l \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3k + l = -1 & (1) \\ k - 2l = 4 & (2) \end{cases}$$

D'après (2) : $k = 2l + 4$ (3)

Dans (1) : $3(2l+4) + l = -1 \Leftrightarrow 7l + 12 = -1 \Leftrightarrow l = -\frac{13}{7}$

Dans (3) : $k = -\frac{26}{7} + \frac{28}{7} = \frac{2}{7}$ (4)

(4) et (3) dans $(*)$:

$$z = -1 + \frac{4}{7} = \frac{18}{7} \Leftrightarrow z = -\frac{3}{7} = \frac{18}{7} \text{, impossible !}$$

Donc $d \cap d' = \varnothing$.

Les droites d et d' sont appelées droites gauches.

Question 4

(1) $A(0,0,0)$ et $B(1,0,0)$ $\Rightarrow X\left(\frac{1}{2},0,0\right)$

$F(1,0,1)$ et $G(1,1,1)$ $\Rightarrow Y\left(1,\frac{1}{2},1\right)$

$H(0,1,1)$ et $D(0,1,1)$ $\Rightarrow Z\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$

(2) $XY = \sqrt{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}-0\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$

De même : $YZ = XZ = \sqrt{\frac{3}{2}}$, donc le triangle XYZ est équilatéral.

G. Lorang