3B — Corrigé du devoir I, 1 — 26.10.2011

Question 1

(1) C.E $\begin{cases} x^2-x-2 \neq 0 \iff x \neq 2 \text{ et } x \neq -1 \\ 2-x \neq 0 \iff x \neq 2 \end{cases}$

$$\boxed{D = \mathbb{R} \setminus \{-1;2\}}$$

$$\frac{3x+2}{(x+1)(x-2)} - \frac{x}{2-x} = 1$$

$$\iff \frac{3x+2}{(x+1)(x-2)} + \frac{x(x+1)}{(x-2)(x+1)} = \frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+1)} \quad \Big| \cdot (x-2)(x+1)$$

$$\iff 3x+2 + \cancel{x^2} + x = \cancel{x^2} - x - 2$$

$$\iff 4x+2 = -x-2$$

$$\iff 5x = -4$$

$$\iff x = -\frac{4}{5} \in D \qquad \boxed{S = \left\{-\frac{4}{5}\right\}}$$

(2) C.E: $\begin{cases} x+2 \geq 0 \iff x \geq -2 \\ \frac{x}{x-1} \geq 0 \text{ et } x \neq 1 \iff x \leq 0 \text{ ou } x > 1 \end{cases}$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{x}{x-1}$		$+$	0	$-$	‖	$+$	

$$\boxed{D = [-2,0] \cup]1,+\infty[}$$

$$(\forall x \in D) \quad \underbrace{\sqrt{x+2}}_{+} = \underbrace{\frac{x}{x-1}}_{+} \quad \Big| \,(\ )^2$$

$$\iff x+2 = \frac{x^2}{(x-1)^2} \quad \Big| \cdot (x-1)^2$$

$$\iff (x+2)(x-1)^2 = x^2$$

$$\iff (x+2)(x^2-2x+1) = x^2$$

$$\iff x^3 \cancel{-2x^2} + x \cancel{+2x^2} - 4x + 2 = x^2$$

$$\iff \underbrace{x^3 - x^2 - 3x + 2}_{p(x)} = 0$$

$\text{Div } 2 = \{\pm 1; \pm 2\}$

$p(2) = 0 \Rightarrow p(x)$ est divisible par $x-2$

	1	-1	-3	2
2		2	2	-2
	1	1	-1	0

$\Rightarrow \quad p(x) = (x-2)(x^2+x-1)$

et $\quad p(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x^2+x-1=0$

$\Delta = 5$

$x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \in D$

$x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \notin D$

Donc $\boxed{S = \left\{2, \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}}$

Question 2

(1) $\dfrac{x}{3-x} \leq 2 \qquad$ C.E : $x \neq 3$

$\Leftrightarrow \dfrac{x}{3-x} - \dfrac{2(3-x)}{3-x} \leq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x}{3-x} - \dfrac{6-2x}{3-x} \leq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x-6+2x}{3-x} \leq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{3x-6}{3-x} \leq 0$

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$3-x$		+	|	+	0	$-$	
$3x-6$		$-$	0	+	|	+	
$\dfrac{3x-6}{3-x}$		$-$	0	+	||	$-$	

$\boxed{S_1 =]-\infty; 2] \cup]3, +\infty[}$

(2) $2 < x^2 - 2x$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 2 > 0$

$\Delta = 4 + 8 = 12$

$x_1 = \dfrac{2-\sqrt{12}}{2} = 1-\sqrt{3}$

$x_2 = 1+\sqrt{3}$

x	$-\infty$		$1-\sqrt{3}$		$1+\sqrt{3}$		$+\infty$
x^2-2x-2		+	0	$-$	0	+	

$\boxed{S_2 =]-\infty; 1-\sqrt{3}[\cup]1+\sqrt{3}, +\infty[}$

$S = S_1 \cap S_2 =]-\infty; 1-\sqrt{3}[\cup]3, +\infty[$

Question 3

(1) $3m x^2 - (m+3)x + 1 = 0 \quad (E)$

1er cas : $\boxed{m = 0}$

Alors (E) est du 1er degré :

$(E) : -x + 1 = 0 \iff x = 1$

$\boxed{S = \{1\}}$

2e cas : $\boxed{m \neq 0}$

Alors (E) est du 2e degré :

$$\Delta = (m+3)^2 - 12m$$
$$= m^2 + 6m + 9 - 12m$$
$$= m^2 - 6m + 9$$
$$= (m-3)^2 \geq 0$$

Donc (E) admet 1 solution si $m = 3$ et 2 solutions distinctes si $m \neq 3$ (et $m \neq 0$)

$$x_1 = \frac{m+3-(m-3)}{6m} = \frac{6}{6m} = \frac{1}{m}$$

$$x_2 = \frac{m+3+(m-3)}{6m} = \frac{2\cancel{m}}{6\cancel{m}} = \frac{1}{3}$$

$$S = \left\{ \frac{1}{m} \; ; \; \frac{1}{3} \right\}$$

En résumé : Si $m = 0$ ou $m = 3$, alors (E) admet une solution unique, sinon (E) admet toujours 2 solutions distinctes.

(2) (E) admet des racines inverses et distinctes

$\iff P = \frac{1}{3m} = 1 \quad$ (et $\Delta > 0$)

$\iff \boxed{m = \frac{1}{3}}$

Les deux racines sont alors 3 et $\frac{1}{3}$.

Question 4

(1) $p(x) = 4x^2 + (k+3)x + 2k-1$

est toujours du 2^e degré.

$$\Delta = (k+3)^2 - 16(2k-1)$$
$$= k^2+6k+9 - 32k+16$$
$$= k^2 - 26k + 25$$
$$= (k-1)(k-25)$$

(1 est racine évidente, donc la 2^e est 25)

$$P = \frac{2k-1}{4}$$

$$S = -\frac{k+3}{4}$$

Valeurs critiques : $1 ; 25 ; \frac{1}{2} ; -3$

k	$-\infty$	-3		$\frac{1}{2}$		1		25	$+\infty$
Δ	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
P	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
S	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
nombre de racines de $p(x)$	2	2	2	2	2	1	0	1	2
signe des racines de $p(x)$	$\pm$	$\pm$	$\pm$	0 $-$	$-$ $-$	$-$	X	$-$	$-$ $-$

(2) $p(x)$ a des racines opposées

$\Leftrightarrow$ $\boxed{k=-3}$

Si $k=-3$ alors $p(x) = 4x^2 - 6 - 1$
$$= 4x^2 - 7$$
$$= (2x-\sqrt{7})(2x+\sqrt{7})$$

Les deux racines sont donc $\pm \frac{\sqrt{7}}{2}$.