3 B_1 Corrigé du devoir I, 2

Question 1

Voir cours

Question 2

(1) C.E : $\begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x}+2 \neq 0 \text{ , toujours vrai} \end{cases}$

$D_f = \mathbb{R}_+$

(2) f n'est ni paire, ni impaire car son domaine n'est pas symétrique p.r. à 0.

(3) $f(10^{-2}) = 1 - \frac{6}{\sqrt{10^{-2}}+2} = 1 - \frac{6}{\frac{1}{10}+2} = 1 - \frac{\cancel{6}^{2} \cdot 10}{\cancel{21}_{7}} = \underline{\underline{-\frac{13}{7}}}$

$f(10^2) = 1 - \frac{6}{\sqrt{10^2}+2} = 1 - \frac{6}{12} = 1 - \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$

(4) a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{6}{\sqrt{x}+2} = 0$

$\Leftrightarrow -\frac{6}{\sqrt{x}+2} = -1 \quad |\, (\,)^{-1} \; |\cdot(-1)$

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+2}{6} = 1$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}+2 = 6$

$\Leftrightarrow \sqrt{x} = 4$

$\Leftrightarrow x = 16$

b) $f(x) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 1 - \frac{6}{\sqrt{x}+2} = \frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow \underbrace{-\frac{6}{\sqrt{x}+2}}_{-} = \underbrace{\frac{1}{2}}_{+}$ impossible !

(5) $(\forall x, x' \in \mathbb{R}_+) \quad x < x' \Rightarrow \sqrt{x} < \sqrt{x'}$

$\Rightarrow \underbrace{\sqrt{x}+2}_{+} < \underbrace{\sqrt{x'}+2}_{+} \quad |\, (\,)^{-1}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}+2} > \frac{1}{\sqrt{x'}+2} \quad |\cdot(-6)$

$\Rightarrow -\frac{6}{\sqrt{x}+2} < -\frac{6}{\sqrt{x'}+2} \quad |+1$

$\Rightarrow 1 - \frac{6}{\sqrt{x}+2} < 1 - \frac{6}{\sqrt{x'}+2}$

$\Rightarrow f(x) < f(x')$

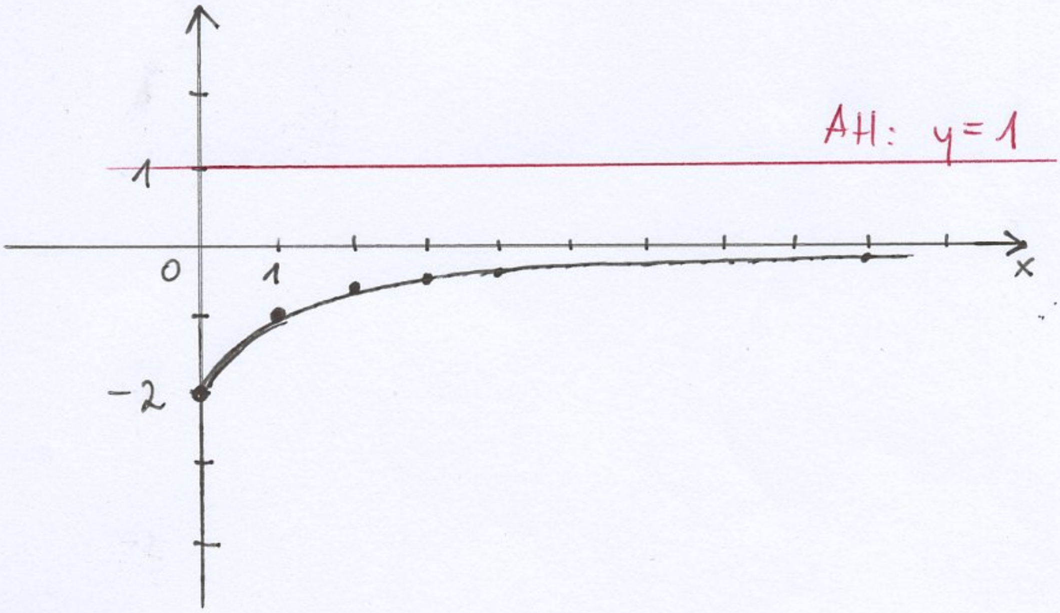
Donc f est str. $\nearrow$ sur $\mathbb{R}_+$.

(6)

x	0		$+\infty$
$f(x)$	-2 (m)	$\nearrow$	1

(7)

x	0	1	2	3	4	9
$f(x)$	-2	-1	$-0{,}76$	$-0{,}61$	$-0{,}5$	$-0{,}2$



<u>Question 3</u>

(1) a) C.E : $x^2-4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 2$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$

$$f(-x) = \frac{|-x|+2}{(-x)^2-4} = \frac{|x|+2}{x^2-4} = f(x)$$

Donc f est paire.

b) C.E : $x^2-2x \neq 0 \Leftrightarrow x(x-2) \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq 0$ et $x \neq 2$

$D_g = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$

g n'est ni paire, ni impaire car son domaine n'est pas symétrique p.r. à 0.

(2) a) $\left(\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{2\}\right)$

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2-4} = \frac{\cancel{x+2}}{(x-2)\cancel{(x+2)}} = \frac{1}{x-2}$$

et $$g(x) = \frac{x}{x^2-2x} = \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(x-2)} = \frac{1}{x-2}$$

Donc $f(x) = g(x)$

b) $$f(-1) = \frac{1+2}{1-4} = \frac{3}{-3} = -1$$

$$g(-1) = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$$

c) f et g ne sont pas égales car elles n'ont pas le même domaine

(ou bien, comme on a vu en b) :

$f(-1) \neq g(-1)$)

<u>Question 4</u>

Soit $d_1 = (AB)$, $d_2 = (BC)$ et $d_3 = (DE)$ les trois droites qui contiennent le graphe de f, avec $A(-4,-2)$, $B(3,2)$, $C(5,-1)$, $D(5,-3)$ et $E(6,1)$

$d_1 \equiv y = \frac{4}{7}x + k$ $\qquad B \in d_1 \Leftrightarrow 2 = \frac{4}{7}\cdot 3 + k$

$\Leftrightarrow 2 = \frac{12}{7} + k$

$\Leftrightarrow k = \frac{2}{7}$

$\Rightarrow \boxed{d_1 \equiv y = \frac{4}{7}x + \frac{2}{7}}$

$d_2 \equiv y = -\frac{3}{2}x + k'$, $B \in d_2 \Leftrightarrow 2 = -\frac{3}{2}\cdot 3 + k'$

$\Leftrightarrow k' = 2 + \frac{9}{2} = \frac{13}{2}$

$\Rightarrow \boxed{d_2 \equiv y = -\frac{3}{2}x + \frac{13}{2}}$

$d_3 \equiv y = 4x + k''$

$D(5,-3) \in d_3 \Leftrightarrow -3 = 4\cdot 5 + k''$

$\Leftrightarrow k'' = -23$

Donc $\boxed{d_3 \equiv y = 4x - 23}$

D'où l'expression analytique de $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{7}x + \frac{2}{7} & \text{si } x \leq 3 \\ -\frac{3}{2}x + \frac{13}{2} & \text{si } 3 \leq x \leq 5 \\ 4x - 23 & \text{si } x > 5 \end{cases}$$

<u>Question 5</u>

1) Vitesse à l'aller : $v+5$

Vitesse au retour : $v-5$

2) Durée du trajet à l'aller : $\frac{75}{v+5}$

" " " au retour : $\frac{75}{v-5}$

3) Donc, puisque la durée totale du trajet est de 8h on a :

$$\frac{75}{v+5} + \frac{75}{v-5} = 8$$

$$\Leftrightarrow \frac{75(v-5) + 75(v+5)}{v^2-25} = 8 \quad /\cdot v^2-25$$

$$\Leftrightarrow 75v \cancel{-375} + 75v \cancel{+375} = 8v^2 - 200$$

$$\Leftrightarrow 8v^2 - 150v - 200 = 0$$

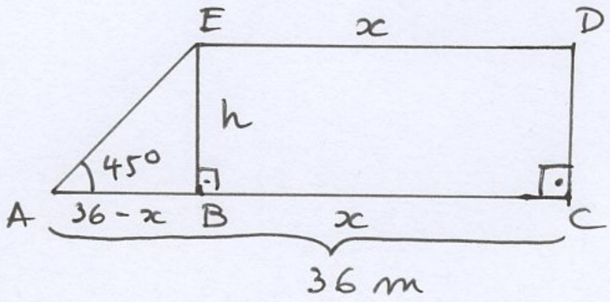
$$\Leftrightarrow 4v^2 - 75v - 100 = 0$$

Carré $\longrightarrow$ $v_1 = -1,25$ à écarter car $v > 0$

$v_2 = 20$

Donc la vitesse propre du bateau est de 20 km/h.

Question 6



Posons : $ED = x = BC$

$AB = 36 - x$

$h = EB =$ hauteur du trapèze

$$\tan 45° = \frac{h}{36-x} = 1 \iff h = 36 - x$$

Donc :

$$\left(\frac{36 + x}{2}\right) \cdot (36 - x) = 360$$

$$\iff 36^2 - x^2 = 720$$

$$\iff x^2 = 36^2 - 720 = 576$$

$$\iff x = 24 \quad (\text{car } x > 0)$$

Les dimensions du terrain sont donc :

$AC = 36$ m

$CD = 36 - 24 = 12$ m

$ED = 12$ m

$$AE = \frac{AB}{\cos 45°} = \frac{12}{\sqrt{2}/2} = \frac{24}{\sqrt{2}} = 12 \cdot \sqrt{2} \text{ m}$$

$$AE \simeq 16{,}97 \text{ m}$$