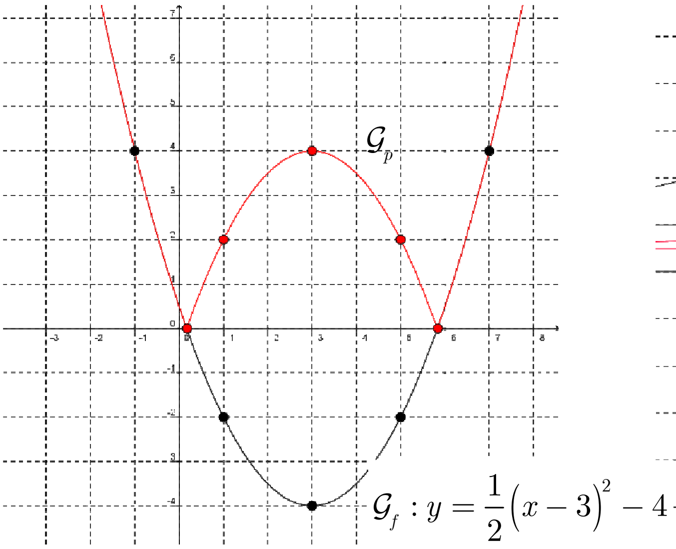
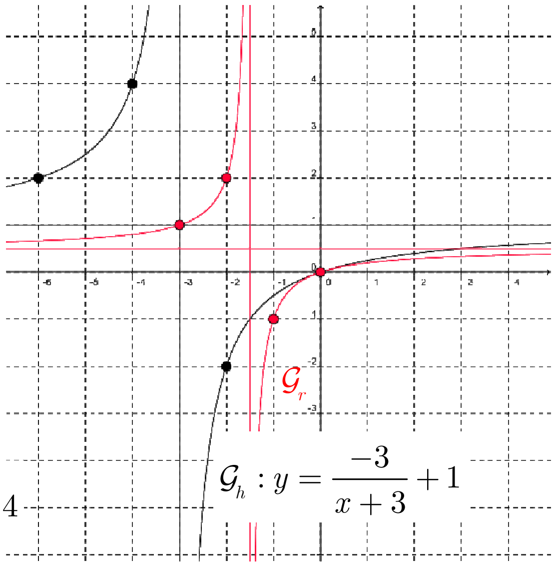
Question 1

(1) Donner une ***équation cartésienne*** des courbes suivantes, sachant qu'elles ont été obtenues par manipulation du graphe d'une fonction usuelle. *(On ne demande pas de justifier les réponses !)*

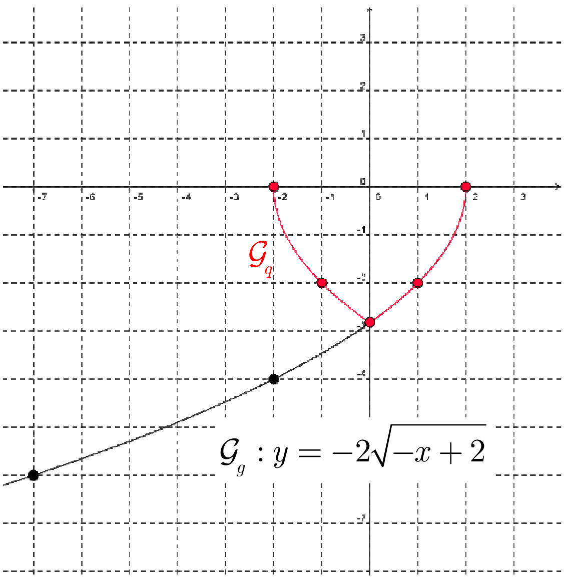
a)



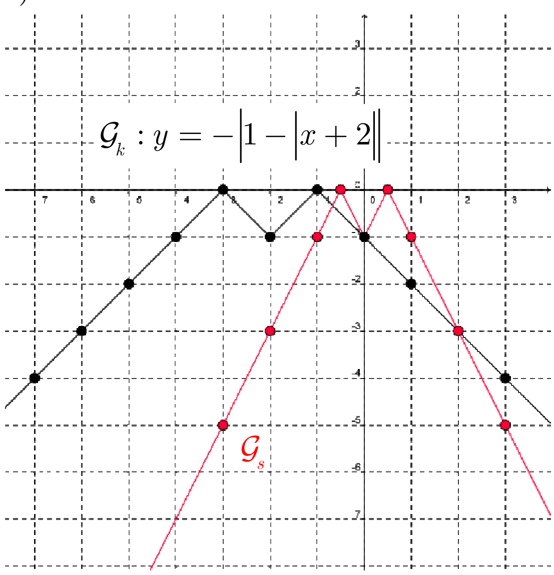
c)



b)



d)

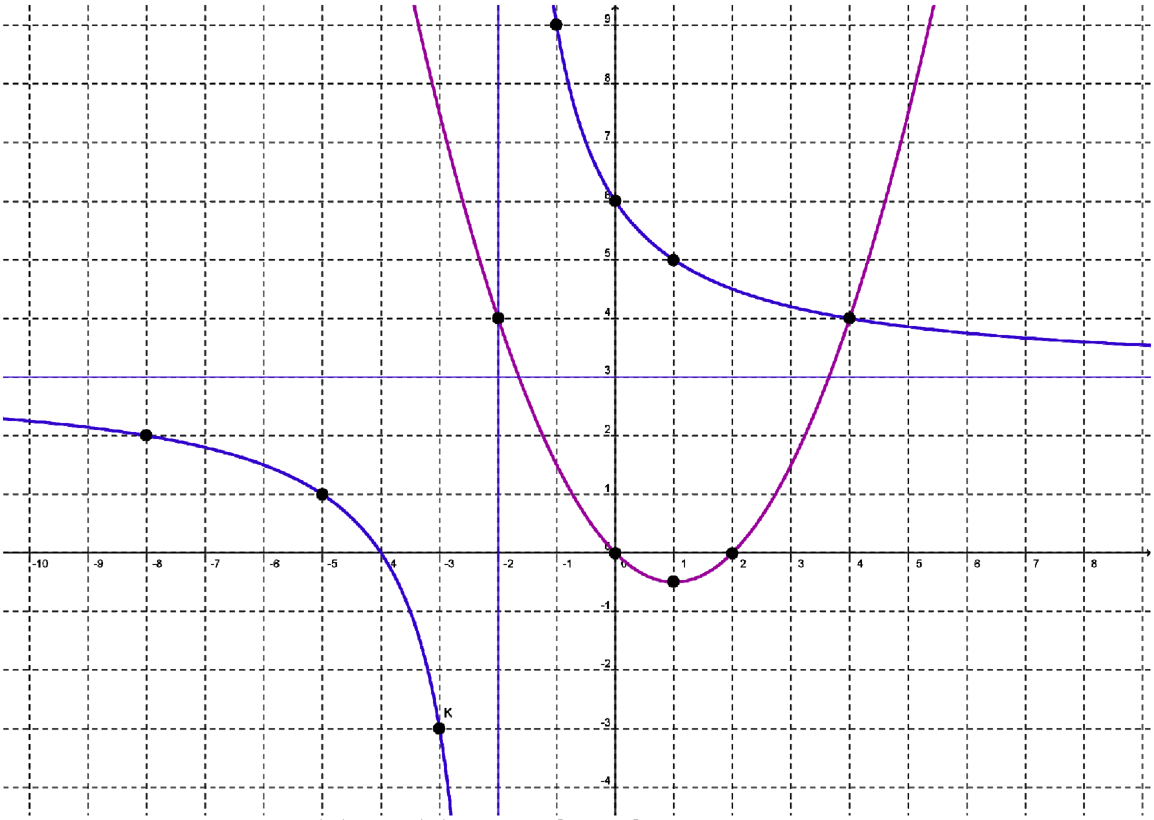


Question 2

(1) a) $\mathcal{G}_f$ est la parabole de sommet $S\left(1,-\frac{1}{2}\right)$ et d'équation $Y=\frac{1}{2}X^2$ dans le repère translaté d'origine S.

b) $\mathcal{G}_g$ est l'hyperbole de centre de symétrie $I\left(-2,3\right)$ et d'équation $Y'=\frac{6}{X'}$ dans le repère translaté d'origine I.

(2) Représentation graphique :



(3) a) Graphiquement : $f\left(x\right)\leq g\left(x\right)\Leftrightarrow x\in\left]-2,4\right]$

b) Algébriquement :

$$
\begin{aligned}
& f\left(x\right)\leq g\left(x\right) \\
\Leftrightarrow\ & \frac{x^2}{2}-x\leq\frac{6}{x+2}+3 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{x^2-2x}{2}\leq\frac{6+3\left(x+2\right)}{x+2} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{x^2-2x}{2}\leq\frac{3x+12}{x+2} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{x\left(x-2\right)\left(x+2\right)-2\left(3x+12\right)}{2\left(x+2\right)}\leq 0 \\
\Leftrightarrow\ & \underbrace{\frac{x^3-10x-24}{2\left(x+2\right)}}_{r\left(x\right)}\leq 0
\end{aligned}
$$

Soit $p(x) = x^3 - 10x - 24$ le polynôme du numérateur. 4 est une racine évidente de p, donc on peut diviser $p(x)$ par $x-4$. Le schéma de Horner donne :

$$p(x) = (x-4)(x^2+4x+6)$$

Le trinôme x^2+4x+6 est toujours positif puisque son discriminant est $\Delta = 16-24<0$. D'où le tableau du signe :

x	$-\infty$	-2		4	$+\infty$
$x-4$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
x^2+4x+6	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$2(x+2)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$r(x)$	$+$	$\parallel$	$-$	0	$+$

On trouve donc bien : $S = \left]-2,4\right]$

Question 3

(1) C.E. pour $k(x)$: $\dfrac{8x^2+14x-15}{-5x-12} \geq 0$ et $-5x-12 \neq 0$

Valeurs critiques :

- $8x^2+14x-15=0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{5}{2} = -2{,}5$ ou $x = \dfrac{3}{4}$
- $-5x-12=0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{12}{5} = -2{,}4$

x	$-\infty$	$-\frac{5}{2}$		$-\frac{12}{5}$		$\frac{3}{4}$	$+\infty$
$8x^2+14x-15$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$-5x-12$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$\dfrac{8x^2+14x-15}{-5x-12}$	$+$	0	$-$	$\parallel$	$+$	0	$-$

Donc :

$$D_k = \left]-\infty, -\tfrac{5}{2}\right] \cup \left]-\tfrac{12}{5}, \tfrac{3}{4}\right]$$

C.E. pour $l(x)$: $8x^2+14x-15 \geq 0$ et $-5x-12>0$

En consultant le tableau du signe ci-dessus, on obtient immédiatement :

$$D_l = \left]-\infty, -\tfrac{5}{2}\right]$$

(2) a) $\mathcal{G}_k \cap Oy = \left\{A\left(0, \tfrac{\sqrt{5}}{4}\right)\right\}$

b) $\mathcal{G}_l \cap Ox = \left\{B\left(-\tfrac{5}{2}, 0\right)\right\}$;

c) $\mathcal{G}_l \cap Oy = \varnothing$

Question 4

On considère la fonction :

$$h : x \mapsto \left|\sqrt{42-7x}-14\right|.$$

(1) C.E : $42-7x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 6$

$D_h = \left]-\infty, 6\right]$

Racines :

$$\begin{aligned} & h\left(x\right)=0 \Leftrightarrow \sqrt{42-7x}=14 \\ & \Leftrightarrow 42-7x=196 \\ & \Leftrightarrow -7x=154 \\ & \Leftrightarrow x=-22 \end{aligned}$$

(2) Tableau de variation de h :

x	$-\infty$	–22		6
$h\left(x\right)$	$+\infty$ $\searrow$	0 (m)	$\nearrow$	14 (M)

Question 5

Soit $\mathcal{P}$ le graphe de la fonction

$$f : x \mapsto \left(m+1\right)x^2 - \frac{x}{m} + \frac{m-1}{8},$$

où m est un paramètre réel non nul.

$\mathcal{P}$ est une parabole $\Leftrightarrow$ $m \neq 0$ et $m \neq -1$. Sous cette hypothèse, l'abscisse du sommet est :

$$x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{\frac{1}{m}}{2\left(m+1\right)} = \frac{1}{2m\left(m+1\right)}$$

Donc :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2m\left(m+1\right)} = \frac{2}{3} \\ & \Leftrightarrow 4m\left(m+1\right)=3 \\ & \Leftrightarrow 4m^2+4m-3=0 \end{aligned}$$

Calculatrice : $m_1 = -\frac{3}{2}$ et $m_2 = \frac{1}{2}$.

On a : $\Delta = \frac{1}{m^2} - \frac{4\left(m+1\right)\left(m-1\right)}{8} = \frac{1}{m^2} - \frac{m^2-1}{2}$

1er cas : $m = -\frac{3}{2}$.

Alors $f\left(x\right) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{2x}{3} - \frac{5}{16}$ et l'ordonnée du sommet est :

$$y_S = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{-\frac{13}{72}}{-2} = -\frac{13}{144}$$

D'où le tableau de variation de f :

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
$f\left(x\right)$	$-\infty$ $\nearrow$	$-\frac{13}{144}$ (M)	$\searrow$ $-\infty$

f n'a pas de racines dans ce cas.

2e cas : $m = \frac{1}{2}$.

Alors $f\left(x\right) = \frac{3}{2}x^2 - 2x - \frac{1}{16}$ et l'ordonnée du sommet est :

$$y_S = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{\frac{35}{8}}{6} = -\frac{35}{48}$$

D'où le tableau de variation de f :

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
$f\left(x\right)$	$+\infty$ $\searrow$	$-\frac{35}{48}$ (m)	$\nearrow$ $+\infty$

f admet 2 racines distinctes dans ce cas.

G. Lorang