3e B1 Corrigé du devoir III, 1

Question 1 : voir cours

Question 2

(1) $AB = \sqrt{13^2 + 1^2} = \sqrt{170}$

$AC = \sqrt{7^2 + (-11)^2} = \sqrt{49+121} = \sqrt{170}$

$AB = AC \Rightarrow \Delta ABC$ est isocèle en A.

$\vec{AB}\begin{pmatrix}13\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{AC}\begin{pmatrix}7\\-11\end{pmatrix}$

$\vec{AB}\cdot\vec{AC} = 91 - 11 = 80 \neq 0$

Donc le ΔABC n'est pas rectangle en A.

(2) $\vec{BC}\begin{pmatrix}-6\\-12\end{pmatrix} \parallel \vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

h_A = hauteur issue de A

$h_A \perp \vec{u} \Rightarrow h_A : x + 2y + c = 0$

$A \in h_A \Leftrightarrow -3 + 4 + c = 0$

$\Leftrightarrow c = -1$

Donc $\boxed{h_A \equiv x + 2y - 1 = 0}$

$h_C \perp \vec{AB} \Rightarrow h_C \equiv 13x + y + c' = 0$

$C \in h_C \Leftrightarrow 13\cdot 4 - 9 + c' = 0$

$\Leftrightarrow c' = -43$

Donc $\boxed{h_C \equiv 13x + y - 43 = 0}$

$\{H\} = h_A \cap h_C$

$H \begin{cases} x = -2y + 1 & (1) \\ y = -13x + 43 & (2) \end{cases}$

(1) dans (2) : $y = -13(-2y+1) + 43$

$\Leftrightarrow -25y = 30$

$\Leftrightarrow y = -\frac{6}{5}$ (3)

(3) dans (1) : $x = \frac{17}{5}$

Donc l'orthocentre $H\left(\frac{17}{5}, -\frac{6}{5}\right)$

(3) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \|\vec{AB}\| \cdot \|\vec{AC}\| \cdot \cos\alpha$

$\Leftrightarrow 80 = 170 \cdot \cos\alpha$

$\Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{8}{17}$

$\Leftrightarrow \alpha \simeq 61° 55' 39{,}05''$

(4) $[ABC] = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin\alpha$

Or : $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\Leftrightarrow \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$

$\Leftrightarrow \sin^2\alpha = 1 - \frac{64}{289} = \frac{225}{289}$

$\Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{15}{17}$ $(\sin\alpha > 0)$

Donc $[ABC] = \frac{1}{2}\sqrt{170} \cdot \sqrt{170} \cdot \frac{15}{17} = \frac{1}{\cancel{2}_1} \frac{1\cancel{170}^{\cancel{10}^{5}} \cdot 15}{\cancel{17}_1} = 75$

(5) ABDC est un losange

$\Leftrightarrow$ ABDC est un parallélogramme (car $AB = AC$)

$\Leftrightarrow \vec{AB} = \vec{CD}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 13 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_D - 4 \\ y_D + 9 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow x_D = 17$ et $y_D = -8$

Donc $D(17, -8)$

Question 3

B est le symétrique de A p.r. à m.

Soit d la droite $\perp$ m et passant par A.

$d \perp m \Rightarrow d \equiv x - 2y + k = 0$

$A \in d \Leftrightarrow -1 - 10 + k = 0$

$\Leftrightarrow k = 11$

Donc $d \equiv x - 2y + 11 = 0$

$I =$ mil $[AB]$ est le point d'intersection de d et m.

$$I \begin{cases} 2x + y + 3 = 0 & (1) \\ x = 2y - 11 & (2) \end{cases}$$

$(2) \to (1)$ $\quad 2(2y-11) + y + 3 = 0$

$\Leftrightarrow 5y - 22 + 3 = 0$

$\Leftrightarrow 5y = 19 \Leftrightarrow y = \frac{19}{5}$ (3)

$(3) \to (2)$ $\quad x = \frac{38}{5} - 11 = -\frac{17}{5}$

Donc $I\left(-\frac{17}{5} ; \frac{19}{5}\right)$

$I =$ mil $[AB]$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_I \\ y_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_A + x_B}{2} \\ \frac{y_A + y_B}{2} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{17}{5} = \frac{-1 + x_B}{2} \\ +\frac{19}{5} = \frac{5 + y_B}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = -\frac{34}{5} + 1 = \frac{-29}{5} \\ y_B = \frac{38}{5} - 5 = \frac{13}{5} \end{cases}$$

Donc $B\left(-\frac{29}{5} ; \frac{13}{5}\right)$

<u>Question 4</u>

(1) $d_m \parallel e_m \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -m & 1 \\ 5 & m+6 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow -m(m+6) - 5 = 0$

$\Leftrightarrow m^2 + 6m + 5 = 0$

$\Delta = 36 - 20 = 16$

$m_1 = \frac{-6+4}{2} = \underline{-1}$

$m_2 = \frac{-6-4}{2} = \underline{-5}$

b) Si $\underline{m=-1}$ alors on obtient :

$d_{-1} : x + y = 1$ et $e_{-1} : 5x + 5y = 5$

Ces droites sont confondues (éq. équivalentes)

a) Si $\underline{m = -5}$ alors on obtient :

$d_{-5} : 5x + y = 1$ $\quad e_{-5} : 5x + y = 9$

$\Leftrightarrow y = -5x + 1$ $\quad \Leftrightarrow y = -5x + 9$

Ces droites sont strictement parallèles car elles n'ont pas la même ordonnée à l'origine.

(2) $\quad d_m \perp e_m \Leftrightarrow -5m + m + 6 = 0$

$\Leftrightarrow -4m + 6 = 0$

$\Leftrightarrow \underline{m = \frac{3}{2}}$

Alors on obtient les droites :

$d_{3/2} : -\frac{3}{2}x + y = 1$

$\Leftrightarrow -3x + 2y = 2$

$\Leftrightarrow \boxed{3x - 2y + 2 = 0}$

et $e_{3/2} : 5x + \frac{15}{2}y = \frac{5}{2} \quad | \cdot \frac{2}{5}$

$\Leftrightarrow \boxed{2x + 3y = 1}$

Vecteur directeur de $d_{3/2} : \vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

" " " $e_{3/2} : \vec{v}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

3 points de chaque droite :

$d_{3/2}$

x	-2	0	2
y	-2	1	4

$e_{3/2}$

x	2	-1	-4
y	-1	1	3

Question 5

Déterminons le cercle passant par A, B et C.

- $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} \parallel \vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$; mil $[AB] = C'(2,3)$

$m_{[AB]}$ = médiatrice de $[AB]$

$m_{\overrightarrow{AB}} \perp \vec{u} \Rightarrow m_{[AB]} \equiv y = -\frac{1}{2}x + p$

$$C' \in m_{[AB]} \Leftrightarrow 3 = -\frac{1}{2}\cdot 2 + p$$
$$\Leftrightarrow 3 = -1 + p$$
$$\Leftrightarrow p = 4$$

Donc $\boxed{m_{[AB]} \equiv y = -\frac{1}{2}x + 4}$

- $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}3\\-9\end{pmatrix} \parallel \vec{v}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$; mil $[BC] = A'\left(\frac{9}{2} ; \frac{1}{2}\right)$

$m_{[BC]}$ = médiatrice de $[BC]$

$m_{[BC]} \perp \vec{v} \Rightarrow m_{[BC]} \equiv y = \frac{1}{3}x + q$

$$A' \in m_{[BC]} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{\cancel{3}_1}\cdot\frac{\cancel{9}^3}{2} + q$$
$$\Leftrightarrow q = -1$$

Donc $\boxed{m_{[BC]} \equiv y = \frac{1}{3}x - 1}$

- $m_{[AB]} \cap m_{[BC]} = \{\Omega\}$

Ω est le centre du cercle circonscrit $\mathcal{C}$ du ΔABC

$$\Omega \begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 4 & (1) \\ y = \frac{1}{3}x - 1 & (2) \end{cases}$$

(1) dans (2) :

$$\frac{1}{3}x - 1 = -\frac{1}{2}x + 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{6}x = 5$$

$$\Leftrightarrow x = 6 \quad (3)$$

(3) dans (1) :

$$y = -\frac{6}{2} + 4 = -3 + 4 = 1$$

Donc $\boxed{\Omega(6,1)}$

Le rayon du cercle $\mathcal{C}$ est :

$$A\Omega = \sqrt{(6-1)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{25} = \boxed{5 = r}$$

Montrons que $D \in \mathcal{C}$:

$$\Omega D = \sqrt{(10-6)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{16+9} = 5 = r$$

Donc A, B, C et D appartiennent au cercle $\mathcal{C}$ de centre Ω et de rayon 5.

Equation développée de $\mathcal{C}$:

$$(x-6)^2 + (y-1)^2 = 25$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 12x + 36 + y^2 - 2y + 1 = 25$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x^2 + y^2 - 12x - 2y + 12 = 0} \quad (\mathcal{C})$$

Question 6

(1) Centre $\Omega(-4,-2)$

Rayon : $\frac{8^2 + 4^2}{4} + 12 = r^2$

$$\Leftrightarrow 20 + 12 = r^2$$

$$\Leftrightarrow 32 = r^2$$

$$\Leftrightarrow r = 4\sqrt{2}$$

$\mathscr{E}$ est le cercle de centre $\Omega(-4,-2)$
et de rayon $r = 4\sqrt{2}$

(2) $\mathscr{E} \cap d \quad \begin{cases} (x+4)^2 + (y+2)^2 = 32 & ① \\ y = x+2 & ② \end{cases}$

② → ① : $(x+4)^2 + (x+4)^2 = 32$

$\Leftrightarrow \quad 2(x+4)^2 = 32$

$\Leftrightarrow \quad (x+4)^2 = 16$

$\Leftrightarrow \quad x+4 = \pm 4$

$\Leftrightarrow \quad x = -4 \pm 4$

$\Leftrightarrow \quad x = 0$ ou $x = -8$

$\Rightarrow$ 2 points d'intersection :

$A(0,2)$ et $B(-8,-6)$

(3) Soit t cette tangente.

$t \perp \overrightarrow{\Omega A}\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ pente $(\Omega A) = 1$

$\Rightarrow$ pente $(t) = -1$

Donc $t \equiv y = -x + p$

$A \in t \Leftrightarrow 2 = -0 + p$

$\Leftrightarrow p = 0$

Donc $t \equiv y = -x + 2$