3B1 Corrigé du devoir II, 3

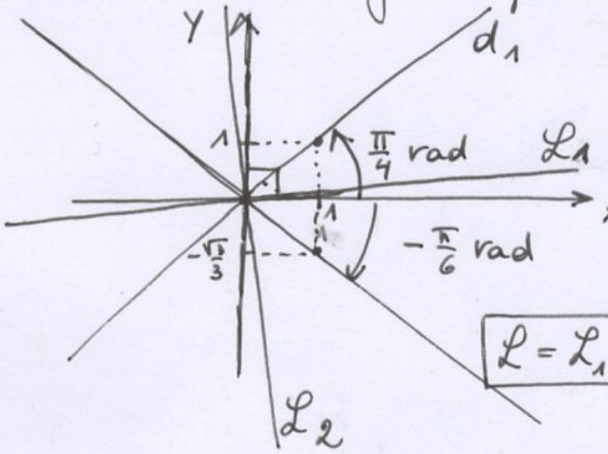
Question 1

Voir cahier

Question 2

(1) $\text{dist}(M, d) = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

(2) $\mathcal{L}$ est la réunion des bissectrices des deux angles formés par d_1 et d_2.



$\boxed{\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2}$

$d_1 \equiv y = x$
1re bissectrice du repère (angle de $\frac{\pi}{4}$ avec Ox)

$d_2 \equiv y = \underbrace{-\frac{\sqrt{3}}{3}}_{= \tan(-\frac{\pi}{6})} x$

(angle de $-\frac{\pi}{6}$ avec Ox)

$$\begin{aligned}
M(x,y) \in \mathcal{L} &\Leftrightarrow \text{dist}(M, d_1) = \text{dist}(M, d_2) \\
&\Leftrightarrow \frac{|x-y|}{\sqrt{2}} = \frac{|x+\sqrt{3}y|}{2} \\
&\Leftrightarrow 2|x-y| = \sqrt{2}\,|x+\sqrt{3}y| \\
&\Leftrightarrow 2x-2y = \sqrt{2}x + \sqrt{6}y \\
&\qquad \text{ou} \\
&\qquad 2x-2y = -\sqrt{2}x - \sqrt{6}y \\
&\Leftrightarrow (2-\sqrt{2})x = (2+\sqrt{6})y \\
&\qquad \text{ou} \\
&\qquad (2+\sqrt{2})x = (2-\sqrt{6})y \\
&\Leftrightarrow y = \frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{6}}x \quad (\mathcal{L}_1\text{, car pente} > 0) \\
&\qquad \text{ou } y = \frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{6}}x \quad (\mathcal{L}_2\text{, car pente} < 0)
\end{aligned}$$

(3) $\mathcal{L}_1$ fait un angle de $\dfrac{\frac{\pi}{4}+\left(-\frac{\pi}{6}\right)}{2} = \dfrac{\pi}{24}$ rad avec l'axe des abscisses et son coefficient angulaire est $\dfrac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{6}}$

Donc $\tan\dfrac{\pi}{24} = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{6}} \cdot \dfrac{2-\sqrt{6}}{2-\sqrt{6}}$

$$= \frac{4-2\sqrt{6}-2\sqrt{2}+\sqrt{12}}{4-6}$$

$$= \frac{4-2\sqrt{6}-2\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{-2}$$

$$= \underline{\underline{\sqrt{6}+\sqrt{2}-\sqrt{3}-2}}$$

<u>Question 3</u>

(1) a) ΔABB_1 est rectangle en B_1

$\Rightarrow \widehat{ABB_1} = 180° - 90° - \alpha = \underline{90° - \alpha}$

ΔACC_1 est rectangle en C_1

$\Rightarrow \widehat{ACC_1} = 180° - 90° - \alpha = \underline{90° - \alpha}$

b) ΔBB_1C est rectangle en B_1

$\Rightarrow \widehat{B_1BC} = \underline{90° - \gamma}$

(ou $\widehat{B_1BC} = \beta - (90° - \alpha) = \underline{\alpha + \beta - 90°}$)

De même :

$\widehat{C_1CB} = \underline{90° - \beta}$

(ou $\widehat{C_1CB} = \gamma - (90° - \alpha) = \underline{\alpha + \gamma - 90°}$)

c) Comme H et H' sont symétriques p.r. à (BC),

$\widehat{CBH'} = \widehat{CBH} = \widehat{CBB_1} = 90° - \gamma$

et $\widehat{BCH'} = \widehat{BCH} = \widehat{C_1CB} = 90° - \beta$

d) $\widehat{BH'C} = 180° - \widehat{CBH'} - \widehat{BCH'}$

$= 180° - (90° - \gamma) - (90° - \beta)$

$= \beta + \gamma = 180° - \alpha$

(2) Les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BH'C}$ sont supplémentaires d'après (1 d) et $ABH'C$ est convexe. Il est donc inscriptible dans un cercle. En d'autres termes, H' appartient au cercle circonscrit du triangle ABC. De façon analogue, on pourrait démontrer que les symétriques de H p.r. à (AB) et (AC) respectivement appartiennent aussi au cercle circonscrit.

Question 4

voir devoir II, 2

Question 5

(1) $\widehat{AOB} = \dfrac{360°}{5} = 72°$

$\widehat{OAB} = \widehat{OBA} = \dfrac{180° - 72°}{2} = 54°$

$\widehat{ABC} = 2 \cdot 54° = 108°$

$\widehat{AME} = \frac{1}{2} \widehat{AOE} = 36°$

$\widehat{CME} = \frac{1}{2} \widehat{COE} = 72°$

$\widehat{BMC} = \frac{1}{2} \widehat{BOC} = 36°$

$\widehat{AMB} = 180° - 36° = 144°$

(2) $\widehat{BCM} + \widehat{MEA} = \frac{1}{2} \widehat{BOM} + \frac{1}{2} \widehat{MOA}$

$= \frac{1}{2} (\widehat{BOM} + \widehat{MOA})$

$= \frac{1}{2} (\widehat{BOA}) = \frac{1}{2} \cdot 72°$

$= 36°$

Question 6

(1) a) $A = \sum_{n=0}^{12} (-2)^n$

$= 1 \cdot \frac{1-(-2)^{13}}{1-(-2)}$

$= \frac{1}{3} \cdot (1 + 2^{13})$

$= 2731$

b) $B = 7 + 11 + 15 + \ldots + 139$

$= \sum_{n=0}^{33} (4n+7)$

$= 34 \cdot \frac{7+139}{2}$

$= 2482$

c) $C = 1215 + 405 + 135 + \ldots + \frac{5}{81}$

$= 5 \cdot 3^5 + 5 \cdot 3^4 + \ldots + 5 \cdot 3^{-4}$

$= \sum_{n=-4}^{5} 5 \cdot 3^n$

$= 5 \cdot 3^{-4} \cdot \frac{1-3^{10}}{1-3}$

$= \frac{5}{81} \cdot \frac{3^{10}-1}{2}$

$= \frac{147620}{81} \quad (\simeq 1822{,}47)$

(2) $a_{16} = 4$ et $a_{22} = a_{16} + 6 \cdot r = 6$

$\Leftrightarrow \quad 4 + 6r = 6$

$\Leftrightarrow \quad r = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Donc $a_{12} = a_{16} - 4 \cdot r = \frac{8}{3}$ et $a_{27} = a_{22} + 5r = \frac{23}{3}$

Ainsi $S = 16 \cdot \frac{8/3 + 23/3}{2} = 8 \cdot \frac{31}{3} = \frac{248}{3}$