Question 1

Voir cours.

Question 2

(1) On développe le membre de gauche :

$$\left(\frac{x}{2}-3\right)\left(6-x\right)=-2$$

$$\Leftrightarrow 3x-\frac{x^2}{2}-18+3x=-2$$

$$\Leftrightarrow x^2-12x+32=0$$

$$\Delta=144-128=16$$

$$x_1=\frac{12-4}{2}=4 \text{ et } x_2=\frac{12+4}{2}=8$$

$$S=\left\{4,8\right\}$$

(2) $x^7-5x^4=2x^3-10$

$$\Leftrightarrow x^4\left(x^3-5\right)=2\left(x^3-5\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(x^3-5\right)\left(x^4-2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x^3=5 \text{ ou } x^4=2$$

$$\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{5} \text{ ou } x=\pm\sqrt[4]{2}$$

$$S=\left\{\sqrt[3]{5},\pm\sqrt[4]{2}\right\}$$

(3) $4x^3+4x^2=7x-2$

$$\Leftrightarrow \underbrace{4x^3+4x^2-7x+2}_{p(x)}=0$$

$$\text{Div}\,2=\left\{\pm1,\pm2\right\}$$

$$p\left(1\right)=4+4-7+2=3\neq0$$

$$p\left(-1\right)=-4+4+7+2=9\neq0$$

$$p\left(2\right)=32+16-14+2=36\neq0$$

$$p\left(-2\right)=-32+16+14+2=0$$

Donc $p\left(x\right)$ est divisible par $\left(x+2\right)$.

Le schéma de Horner donne : $p\left(x\right)=\left(x+2\right)\left(4x^2-4x+1\right)$.

Donc :

$$\begin{aligned} &p\left(x\right)=0 \Leftrightarrow \left(x+2\right)\left(4x^2-4x+1\right)=0\\ &\Leftrightarrow x=-2 \text{ ou } \left(2x-1\right)^2=0\\ &\Leftrightarrow x=-2 \text{ ou } x=\tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

$$S=\left\{-2,\tfrac{1}{2}\right\}$$

(4) $\quad \dfrac{3}{x-2}+\dfrac{2-x}{3-x}=\dfrac{x-5}{x^2-5x+6}$

C.E. : $\begin{cases} x-2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 2\\ 3-x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 3\\ x^2-5x+6\neq 0 \Leftrightarrow \left(x-2\right)\left(x-3\right)\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 0 \text{ et } x\neq 3 \end{cases}$

$D=\mathbb{R}\setminus\left\{2,3\right\}$

$$\begin{aligned} &\frac{3}{x-2}+\frac{2-x}{3-x}=\frac{x-5}{x^2-5x+6}\\ &\Leftrightarrow \frac{3}{x-2}-\frac{2-x}{x-3}=\frac{x-5}{\left(x-2\right)\left(x-3\right)} \quad /\cdot\left(x-2\right)\left(x-3\right)\\ &\Leftrightarrow 3\left(x-3\right)-\left(2-x\right)\left(x-2\right)=x-5\\ &\Leftrightarrow 3x-9+\left(x-2\right)^2=x-5\\ &\Leftrightarrow 3x-9+x^2-4x+4=x-5\\ &\Leftrightarrow x^2-2x=0\\ &\Leftrightarrow x\left(x-2\right)=0\\ &\Leftrightarrow x=0 \ \left(\in D\right) \text{ ou } x=2 \text{ (à écarter)} \end{aligned}$$

$S=\left\{0\right\}$

Question 3

$$\frac{x^2}{3}+\frac{\sqrt{5}x}{2}+\frac{1}{4}=0$$

$\Delta=\dfrac{5}{4}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{11}{12}>0 \Rightarrow$ 2 racines distinctes

$P=\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}}=\dfrac{3}{4}>0 \Rightarrow$ les 2 racines ont le même signe

$S=-\dfrac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{\frac{1}{3}}=-\dfrac{3\sqrt{5}}{2}<0 \Rightarrow$ les 2 racines sont strictement négatives.

Question 4

Soit x et y les deux nombres cherchés. On a le système :

$$\begin{cases} x-y=8 \Leftrightarrow x=y+8 & (1)\\ xy=84 & (2) \end{cases}$$

(1) dans (2) :

$y\left(y+8\right)=84$

$\Leftrightarrow y^2+8y=84$

$\Leftrightarrow y^2+8y-84=0$

$\Delta=64+4\cdot 84=400$

$y_1=\dfrac{-8-20}{2}=-14$ et $y_2=\dfrac{-8+20}{2}=6$

Donc il y a deux solutions possibles :

$x=-6$ et $y=-14$ ou $x=14$ et $y=6$

Question 5

Soit v la vitesse de la 1re voiture et t le temps dont elle a besoin.

Alors $v-27$ est la vitesse de la 2e voiture et $t+1{,}5$ le temps dont elle a besoin .

$$\begin{cases} vt=585 & \left(1\right) \\ \left(v-27\right)\left(t+1{,}5\right)=585 & \left(2\right) \end{cases}$$

On développe l'équation (2) et on remplace (1) dedans :

$$\begin{aligned} & vt+1{,}5v-27t-40{,}5=585 \\ \Leftrightarrow\ & \cancel{585}+1{,}5v-27t-40{,}5=\cancel{585} \\ \Leftrightarrow\ & 1{,}5v-27t-40{,}5=0 \quad (3) \end{aligned}$$

Or, d'après (1), $v=\dfrac{585}{t}$ (4).

(4) dans (3) donne :

$$\begin{aligned} & \frac{877{,}5}{t}-27t-40{,}5=0 \ / \cdot t \\ \Leftrightarrow\ & 877{,}5-27t^2-40{,}5t=0 \\ \Leftrightarrow\ & 27t^2+40{,}5t-877{,}5=0 \end{aligned}$$

$\Delta=96'410{,}3=310{,}5^2$

$t_1=\dfrac{-40{,}5-310{,}5}{54}<0$ à écarter

$t_2=\dfrac{-40{,}5+310{,}5}{54}=\dfrac{270}{54}=5$

Donc la 1re voiture a une vitesse moyenne de $\dfrac{585}{5}=117$ km/h et la seconde une vitesse moyenne de $\dfrac{585}{6{,}5}=90$ km/h.

G. Lorang