Nom : .... Prénom : ....

3C1 Corrigé du devoir I,2 11.11.2010

Question 1

(1) $16x^8 + 47x^4 = 3 \Leftrightarrow 16x^8 + 47x^4 - 3 = 0$

Posons : $y = x^4$. Alors l'équation devient : $16y^2 + 47y - 3 = 0$

$\Delta = 47^2 - 4 \cdot 16 \cdot \left(-3\right) = 2401 = 49^2$

$y_1 = \dfrac{-47-49}{32} = -3$ et $y_2 = \dfrac{-47+49}{32} = \dfrac{1}{16}$

Revenons à x :

$$x^4 = -3 \text{ (impossible) ou } x^4 = \frac{1}{16} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \pm\frac{1}{2}$$

$S = \left\{\pm\dfrac{1}{2}\right\}$

(2) $\sqrt{10-3x} + x = 2 \Leftrightarrow \sqrt{10-3x} = 2 - x$

Conditions d'existence : $\begin{cases} 10 - 3x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \dfrac{10}{3} \\ 2 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2 \end{cases}$

$D = \left]-\infty, 2\right]$

Alors :

$$\sqrt{10-3x} = 2 - x \;/\; \left(\;\right)^2$$
$$\Leftrightarrow 10 - 3x = \left(2-x\right)^2 \Leftrightarrow 10 - 3x = 4 - 4x + x^2 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0$$

$\Delta = 1 + 24 = 25$

$x_1 = \dfrac{1-5}{2} = -2 \in D$ et $x_2 = \dfrac{1+5}{2} = 3 \notin D$

Donc $S = \left\{-2\right\}$.

Question 2

(1) $-\dfrac{3}{5}x^2 \leq 2x - 5$

$\Leftrightarrow -3x^2 \leq 10x - 25 \Leftrightarrow 3x^2 + 10x - 25 \geq 0$

$\Delta = 100 + 300 = 400$

$x_1 = \dfrac{-10-20}{6} = -5$ et $x_2 = \dfrac{-10+20}{6} = \dfrac{5}{3}$.

x	$-\infty$		-5		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
$3x^2+10x-25$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $S = \left]-\infty,-5\right] \cup \left[\frac{5}{3},+\infty\right[$.

(2) $\dfrac{3x^2-2x-5}{4-x^2} \leq 0$

C.E. : $4-x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 2$

$D = \mathbb{R} \setminus \left\{\pm 2\right\}$

Valeurs critiques :

- Au dénominateur : 2 et -2
- Au numérateur : $\Delta = 4+60 = 64$; $x_1 = \dfrac{2-8}{6} = -1$ et $x_2 = \dfrac{2+8}{6} = \dfrac{5}{3}$

Tableau du signe :

x	$-\infty$		-2		-1		$\frac{5}{3}$		2		$+\infty$
$3x^2-2x-5$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$4-x^2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$\dfrac{3x^2-2x-5}{4-x^2}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

Donc : $S = \left]-\infty,-2\right[\cup \left[-1,\frac{5}{3}\right] \cup \left]2,+\infty\right[$

(3) $3-\dfrac{2}{x} \geq \dfrac{6}{x+1}$ $\quad D = \mathbb{R} \setminus \left\{0,-1\right\}$

$\Leftrightarrow \dfrac{3x\left(x+1\right)}{x\left(x+1\right)} - \dfrac{2\left(x+1\right)}{x\left(x+1\right)} \geq \dfrac{6x}{x\left(x+1\right)}$

$\Leftrightarrow \dfrac{3x^2+3x-2x-2-6x}{x\left(x+1\right)} \geq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{3x^2-5x-2}{x\left(x+1\right)} \geq 0$

Valeurs critiques :

Au dénominateur : 0 et -1

Au numérateur :

$\Delta = 25+24 = 49$;

$x_1 = \dfrac{5-7}{6} = -\dfrac{1}{3}$;

$x_2 = \dfrac{5+7}{6} = 2$.

Tableau du signe :

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{3}$		0		2		$+\infty$
$3x^2-5x-2$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$x(x+1)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{3x^2-5x-2}{x(x+1)}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Donc : $S = \left]-\infty,-1\right[\cup \left[-\frac{1}{3},0\right[\cup \left[2,+\infty\right[$.

Question 3

(1) ***1er cas*** : $m=-1$. Alors $p\left(x\right)=2x-3$ est du 1er degré et admet une et une seule racine, à savoir $\frac{3}{2}$.

2e cas : $m\neq-1$. Alors $p\left(x\right)$ est du 2e degré et son discriminant est :

$$\begin{aligned}\Delta &= 4m^2-4\left(m+1\right)\left(m-2\right)\\ &= 4m^2-4\left(m^2-2m+m-2\right)\\ &= 4m^2-4m^2+4m+8\\ &= 4m+8\end{aligned}$$

$p\left(x\right)$ admet donc deux racines réelles distinctes ssi

$$\Delta>0\Leftrightarrow 4m+8>0\Leftrightarrow m>-2$$

Conclusion : $p\left(x\right)$ admet deux racines réelles distinctes ssi $m\in\left]2,+\infty\right[\setminus\left\{-1\right\}$.

(2) $p\left(x\right)$ admet deux racines réelles opposées ssi

$$\begin{cases} m\neq-1 \text{ (sinon } p\left(x\right) \text{ est du 1er degré et admet la racine } \frac{3}{2}\text{)}\\ \Delta\geq 0\\ S=0 \text{ (} S \text{ est la somme des racines}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} m\neq-1\\ m\geq-2\\ \dfrac{2m}{m+1}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} m\neq-1\\ m\geq-2\Leftrightarrow m=0\\ m=0\end{cases}$$

Donc $p\left(x\right)$ admet deux racines réelles opposées ssi $m=0$

(3) $p\left(x\right)$ admet deux racines réelles inverses l'une de l'autre ssi

$$\begin{cases} m\neq-1 \text{ (sinon } p\left(x\right) \text{ est du 1er degré et admet la racine } \frac{3}{2}\text{)}\\ \Delta\geq 0\\ P=1 \text{ (} P \text{ est le produit des racines)}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} m\neq-1\\ m\geq-2\\ \dfrac{m-2}{m+1}=1\end{cases}$$

La dernière équation s'écrit : $m-2=m+1\Leftrightarrow -2=1$, impossible !

Donc $p\left(x\right)$ ne peut pas avoir des racines inverses l'une de l'autre.

(4) $\frac{1}{2}$ est une racine de $p\left(x\right)$

$\Leftrightarrow p\left(\frac{1}{2}\right)=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{m+1}{4}-\dfrac{2m}{2}+m-2=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{m+1}{4}-2=0$

$\Leftrightarrow m=7$

G. Lorang