

## Question 1

6 (=2+4) points

- (1) Définir : ensemble des images d'une fonction
- $f$
- .

Voir cours.															

- (2) Définir : fonction décroissante sur un intervalle
- $I$
- (sans figure).

Voir cours.															

## Question 2

8 points

Pour quelles valeurs du paramètre réel  $m$ , l'équation

$$(m+3)x^2 - mx + 1 = 0$$

admet-elle deux solutions distinctes ?

1 <sup>er</sup> cas : $m = -3$ . Alors l'équation est du 1 <sup>er</sup> degré. Elle s'écrit : $3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$ et a donc une solution unique.													
2 <sup>e</sup> cas : $m \neq -3$ . Alors l'équation est du 2 <sup>e</sup> degré. Elle a deux solutions distinctes si le discriminant $\Delta = (-m)^2 - 4 \cdot (m+3) \cdot 1 > 0$													
$\Leftrightarrow m^2 - 4m - 12 > 0$	$\Delta = 16 + 4 \cdot 12 = 64$												
$\Leftrightarrow (m+2)(m-6) > 0$	$m_1 = \frac{4-8}{2} = -2 \quad m_2 = \frac{4+8}{2} = 6$												
$\Leftrightarrow m \in ]-\infty; -2[ \cup ]6; +\infty[$ (et $m \neq -3$ )	<table border="1"> <tr> <td><math>m</math></td> <td><math>-\infty</math></td> <td><math>-3</math></td> <td><math>-2</math></td> <td><math>6</math></td> <td><math>+\infty</math></td> </tr> <tr> <td><math>\Delta</math></td> <td><math>+</math></td> <td><math>+</math></td> <td><math>0</math></td> <td><math>0</math></td> <td><math>+</math></td> </tr> </table>	$m$	$-\infty$	$-3$	$-2$	$6$	$+\infty$	$\Delta$	$+$	$+$	$0$	$0$	$+$
$m$	$-\infty$	$-3$	$-2$	$6$	$+\infty$								
$\Delta$	$+$	$+$	$0$	$0$	$+$								
Conclusion : l'équation admet 2 solutions distinctes $\Leftrightarrow m \in (]-\infty; -2[ \cup ]6; +\infty[) \setminus \{-3\}$													

### Question 3

16 (=4+7+5) points

Déterminer le **domaine** des fonctions suivantes :

(1)  $f: x \mapsto \frac{\sqrt{3-5x}}{-2x+1}$

C.E.:  $\begin{cases} 3-5x \geq 0 \\ -2x+1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x \leq 3 \\ -2x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{3}{5} \\ x \neq \frac{1}{2} \end{cases}$

Donc,  $\text{dom} f = ]-\infty; \frac{3}{5}] \setminus \{\frac{1}{2}\}$

(2)  $g: x \mapsto \sqrt{\frac{2-x}{3-x^2}}$

C.E.:  $\frac{2-x}{3-x^2} \geq 0$  et  $3-x^2 \neq 0$

Valeurs critiques:  $2-x=0 \Leftrightarrow x=2$

$3-x^2=0 \Leftrightarrow x^2=3 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{3}$

$x$	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$2$	$+\infty$	
$2-x$		+	+	+	0	-
$3-x^2$	-	0	+	0	-	-
$\frac{2-x}{3-x^2}$	-	+	-	0	+	+

Donc:  $\text{dom} g = ]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[ \cup [2, +\infty[$

(3)  $h: x \mapsto \frac{2x}{\sqrt{4-x}} + 3\sqrt{2x+4} - \frac{1}{\sqrt{x}}$

C.E.:  $\begin{cases} 4-x > 0 \\ 2x+4 \geq 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 4 \\ x \geq -2 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 4$

Donc:  $\text{dom} h = ]0, 4[$

## Question 4

14 (=6+8) points

Soit la fonction  $f : x \mapsto \frac{2x-1}{x+3}$ .

- (1) Déterminer les images des réels  $-\frac{8}{5}$ ,  $\frac{1}{2}$  et  $\sqrt{5}-1$  par  $f$ .

$$f\left(-\frac{8}{5}\right) = \frac{2\left(-\frac{8}{5}\right) - 1}{-\frac{8}{5} + 3} = \frac{-\frac{16}{5} - 1}{-\frac{8}{5} + 3} = \frac{-\frac{21}{5}}{\frac{7}{5}} = -\frac{21}{8} \cdot \frac{5}{7} = -3$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) - 1}{\frac{1}{2} + 3} = \frac{0}{\frac{7}{2}} = 0$$

$$f(\sqrt{5}-1) = \frac{2(\sqrt{5}-1)-1}{\sqrt{5}-1+3} = \frac{2\sqrt{5}-3}{\sqrt{5}+2} \cdot \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}-2}$$

$$= \frac{2 \cdot 5 - 4\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + 6}{5-4} = 16 - 7\sqrt{5}$$

- (2) Déterminer les antécédents des réels  $-\frac{1}{2}$ ,  $\sqrt{3}$  et 2 par  $f$ .

$$f(x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2x-1}{x+3} = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot (2x-1) = -x-3$$

$$\Leftrightarrow 4x-2 = -x-3$$

$$\Leftrightarrow 5x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{5}$$

$$f(x) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{2x-1}{x+3} = \sqrt{3} \quad | \cdot (x+3)$$

$$\Leftrightarrow 2x-1 = \sqrt{3} \cdot x + 3\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow 2x - \sqrt{3}x = 3\sqrt{3} + 1$$

$$\Leftrightarrow (2-\sqrt{3})x = 3\sqrt{3} + 1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3\sqrt{3}+1}{2-\sqrt{3}} \cdot \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}+9+2+\sqrt{3}}{4-3}$$

$$\Leftrightarrow x = 7\sqrt{3}+11$$

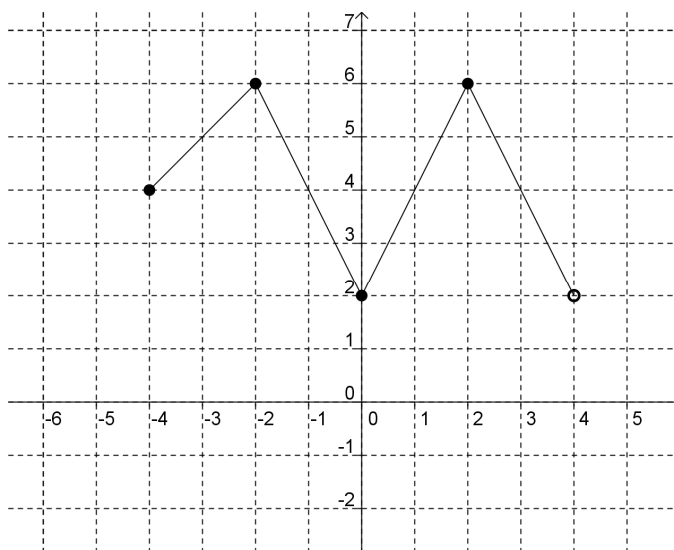
$$f(x) = 2 \Leftrightarrow \frac{2x-1}{x+3} = 2 \Leftrightarrow 2x-1 = 2x+6 \Leftrightarrow -1=6$$

ce qui est impossible !

## Question 5

16 (4+2+1+1+2+4+2) points

Voici le graphe complet d'une fonction  $f$ :



- (1) Compléter chaque case vide du tableau des images suivant par un réel si possible :

$x$	-3	0	3	0,5	4	$\times$	5	2
$f(x)$	5	2	4	3	$\times$	1	$\times$	6

- (2) Compléter :  $\text{dom } f = \dots [-4, 4[ \dots$   $\text{im } f = \dots [2, 6] \dots$
- (3) Compléter :  $f$  a un maximum ..... égal à 6 ..... en 2.
- (4) a) Compléter :  $f$  est strictement décroissante ..... sur  $[-2, 0]$ .  
 b) Un intervalle sur lequel  $f$  est strictement croissante est :  $[-4, -2]$  .....
- (5) L'ensemble des réels dont l'image est  $\geq 4$  est :  $[-4, -1] \cup [1, 3]$  .....
- (6) a) Un réel qui a exactement 1 antécédent par  $f$  est : 2 .....
- b) Un réel qui a exactement 2 antécédents par  $f$  est : 6 .....
- c) L'ensemble des réels qui ont exactement 3 antécédents est :  $]2, 4[$  .....
- (7) Résoudre graphiquement :  $f(x) < 4 \Leftrightarrow x \in \dots ]-1, 1[ \cup ]3, 4[ \dots$

G. Lorang