3C1 Corrigé du devoir II,1 19.01.2011

Question 1 — 21 (=1+3+7+3+3+3+1) points

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{-6}{2+x^2}$

(1) Quel est le domaine de la fonction f ?

C.E : $2+x^2 \neq 0$, toujours vrai ! Donc $\text{dom} f = \mathbb{R}$

(2) Etudier la parité de la fonction f.

$(\forall x \in \mathbb{R})\ f(-x) = \dfrac{-6}{2+(-x)^2} = \dfrac{-6}{2+x^2} = f(x)$

Donc f est paire.

(3) Etudier le sens de variation de f : a) sur $\mathbb{R}_+$ puis b) sur $\mathbb{R}_-$.

a) $(\forall x, x' \in \mathbb{R}_+)\quad x < x' \quad | \ (\ )^2$

$\Rightarrow x^2 < x'^2$

$\Rightarrow \underbrace{2+x^2}_{>0} < \underbrace{2+x'^2}_{>0} \quad | \ (\ )^{-1}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2+x^2} > \dfrac{1}{2+x'^2} \quad | \cdot (-6)$

$\Rightarrow -\dfrac{6}{2+x^2} < -\dfrac{6}{2+x'^2}$

$\Rightarrow f(x) < f(x')$

Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

b) Comme f est paire, elle est str. $\searrow$ sur $\mathbb{R}_-$.

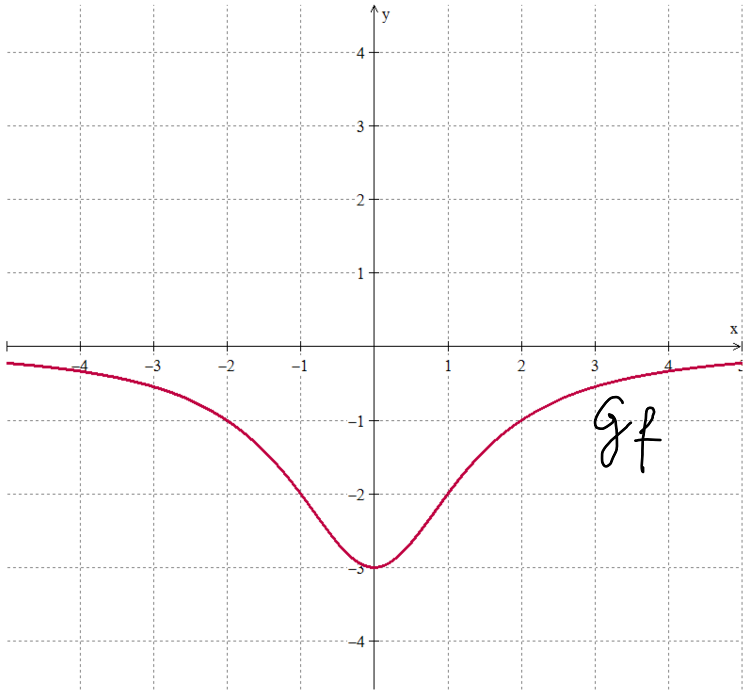
(4) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	-3 (m)	$\nearrow$	

(5) Compléter le tableau des images suivant en utilisant votre calculatrice.

x	0	0,5	1	1,5	2	4	10	20
$f(x)$	-3	$-2,67$	-2	$-1,41$	-1	$-\frac{1}{3}$	$-0,059$	$-0,015$

(6) Représenter graphiquement f dans un repère orthonormé du plan (unité = 1 cm).



(7) Quel est l'ensemble des images de f ?

$\text{im} f = [-3, 0[$

Question 2 — 12 (=6+6) points

Déterminer le domaine et étudier la parité des fonctions suivantes :

(1) $g : x \mapsto \dfrac{2x}{\sqrt{6-3x^2}}$

C.E : $6 - 3x^2 > 0 \mid :3$

$\Leftrightarrow 2 - x^2 > 0$

Valeurs critiques : $\pm\sqrt{2}$

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$2-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$\text{dom}\, g =]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$

$g(-x) = \dfrac{-2x}{\sqrt{6-3(-x)^2}}$

$= \dfrac{-2x}{\sqrt{6-3x^2}}$

$= -g(x)$

Donc g est impaire

(2) $h : x \mapsto \sqrt{4x^2 - 4x - 3}$

C.E : $4x^2 - 4x - 3 \geq 0$

$\Delta = 16 + 48 = 64$

$x_1 = \dfrac{4-8}{8} = -\dfrac{1}{2}$

$x_2 = \dfrac{4+8}{8} = \dfrac{3}{2}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$4x^2-4x-3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\text{dom}\, h =]-\infty ; -\frac{1}{2}] \cup [\frac{3}{2} ; +\infty[$

Comme le domaine de h n'est pas symétrique par rapport à 0, h n'est ni paire, ni impaire.

Question 3 16 points

Représenter graphiquement la fonction

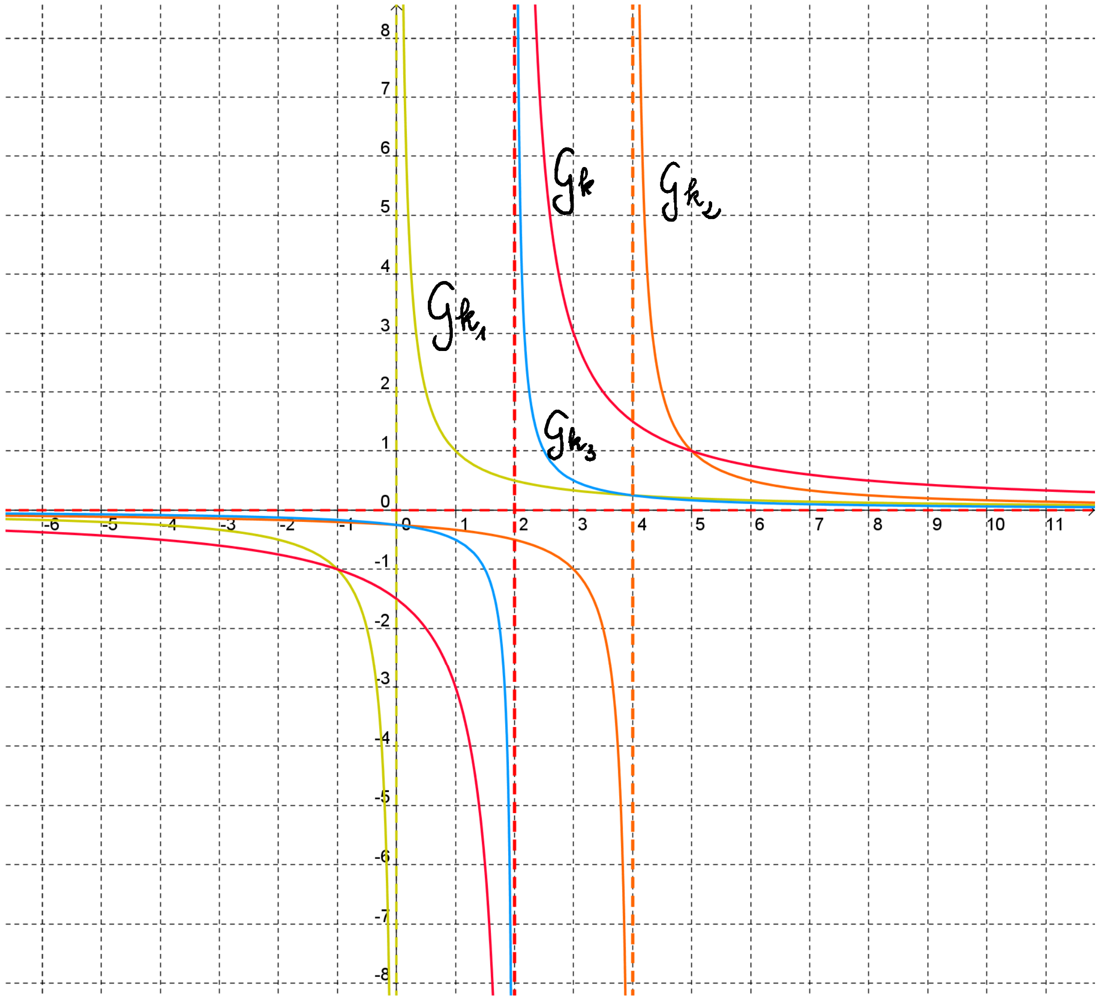
$$k : x \mapsto \frac{6}{2x-4}$$

en manipulant le graphe de la fonction inverse. On demande aussi :

a) de préciser et de représenter graphiquement avec des couleurs différentes les fonctions intermédiaires intervenant dans cette manipulation,

b) de déterminer les relations fonctionnelles entre les différentes fonctions et

c) de préciser les asymptotes au graphe de k.



$k_1 : x \mapsto \frac{1}{x}$

ajouter 4 aux abscisses

$k_2 : x \mapsto \frac{1}{x-4}$

diviser les abscisses par 2

$k_3 : x \mapsto \frac{1}{2x-4}$

multiplier les ordonnées par 6

$k : x \mapsto \frac{6}{2x-4}$

Relations fonctionnelles :

- $k_2(x) = k_1(x-4)$
- $k_3(x) = k_2(2x)$
- $k(x) = 6\,k_3(x)$
  $= 6\,k_2(2x)$
  $= 6\,k_1(2x-4)$

Asymptotes au graphe de k : AH : $y=0$ et AV : $x=2$

Question 4 11 (=3+8) points

Soit la fonction $f : x \mapsto x - \dfrac{1}{x}$.

(1) Déterminer l'image de $\sqrt{2} - 1$ par f ***sans utiliser la calculatrice*** !

(2) Déterminer a) les racines de f et b) les antécédents de 4 par f.

(1) $f(\sqrt{2}-1) = \sqrt{2} - 1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}-1} \cdot \dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}$

$= \sqrt{2} - 1 - \dfrac{\sqrt{2}+1}{2-1}$

$= \sqrt{2} - 1 - (\sqrt{2}+1)$

$= \cancel{\sqrt{2}} - 1 - \cancel{\sqrt{2}} - 1$

$= -2$

(2) a) Les racines de f sont les solutions de $f(x) = 0$

$f(x) = 0 \iff x - \frac{1}{x} = 0 \quad / \cdot x \qquad (\text{C.E. } x \neq 0)$

$\iff x^2 - 1 = 0$

$\iff x^2 = 1$

$\iff x = 1$ ou $x = -1$

Donc f admet 2 racines : 1 et -1.

b) $f(x) = 4 \iff x - \frac{1}{x} = 4 \quad / \cdot x \qquad (\text{C.E.} : x \neq 0)$

$\iff x^2 - 1 = 4x$

$\iff x^2 - 4x - 1 = 0$

$(\Delta = 16 + 4 = 20)$

$\iff x = \dfrac{4 - 2\sqrt{5}}{2}$ ou $x = \dfrac{4 + 2\sqrt{5}}{2}$

$\iff x = 2 - \sqrt{5}$ ou $x = 2 + \sqrt{5}$

Donc 4 admet 2 antécédents : $2-\sqrt{5}$ et $2+\sqrt{5}$.