Nom : .... Prénom : ....

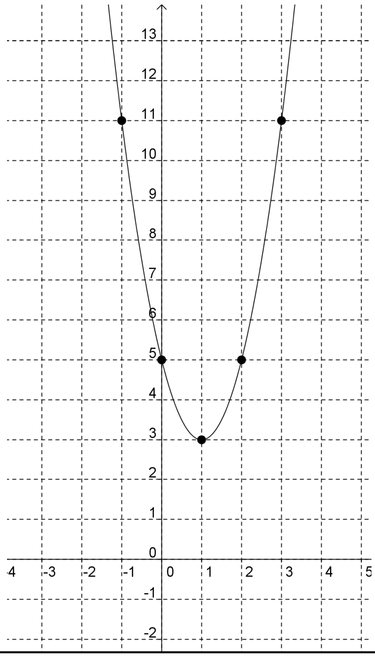
3C1 — Corrigé du devoir II,2 — 9.03.2011

Durée : 60' ***Calculatrice autorisée***

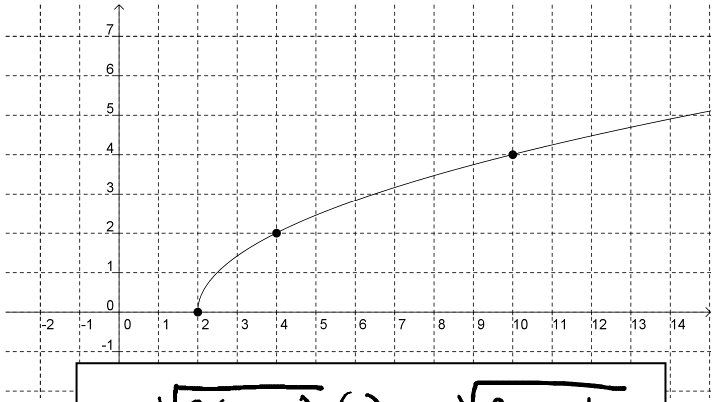
Question 1

15 (=5x3) points

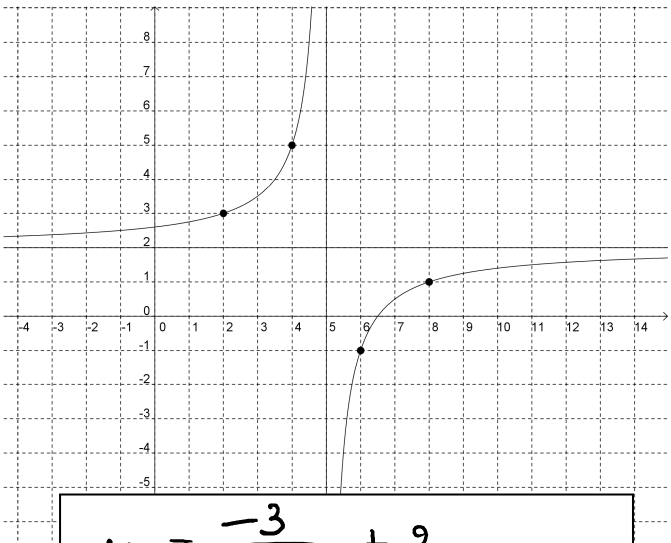
Déterminer les équations des courbes suivantes, sachant qu'elles ont été obtenues en manipulant le graphe d'une fonction usuelle. On ne demande pas de justifier la réponse.



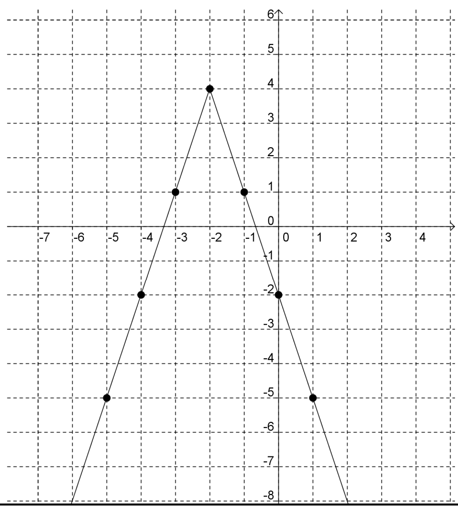
$$y = 2\cdot(x-1)^2 + 3$$



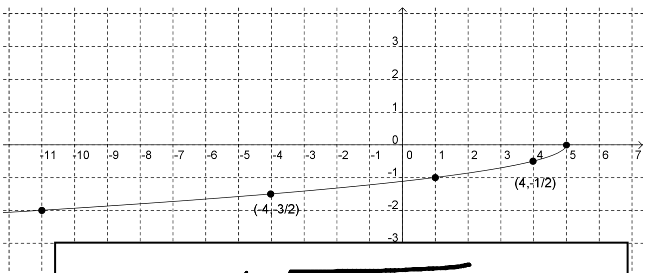
$$y = \sqrt{2(x-2)} \Leftrightarrow y = \sqrt{2x-4}$$



$$y = \frac{-3}{x-5} + 2$$



$$y = -3|x+2| + 4$$

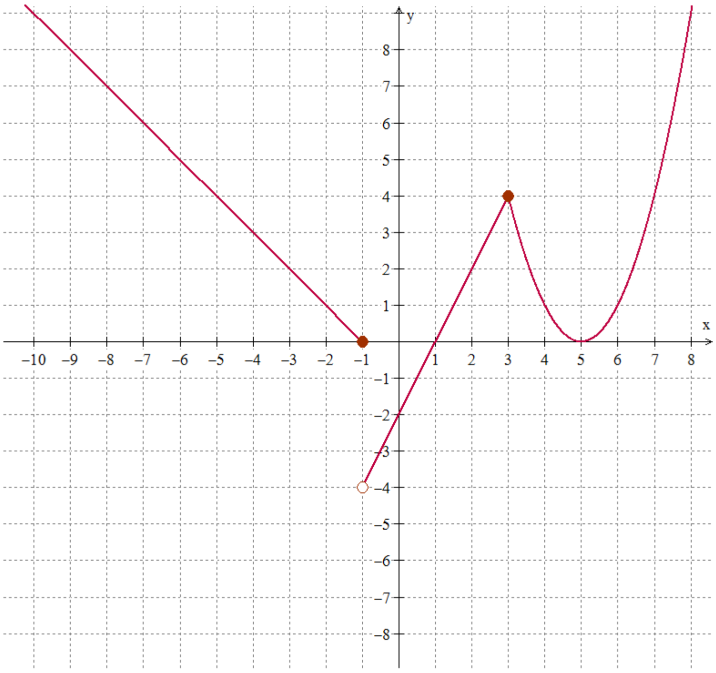


$$y = -\frac{1}{2}\sqrt{5-x}$$

Question 2 15 (8+1+6) points

On donne la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} -x-1 & \text{si } x \leq -1 \\ 2x-2 & \text{si } -1 < x < 3 \\ (x-5)^2 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

(1) Représenter graphiquement la fonction f dans le repère ci-dessous :



(2) Quelles sont les racines de f ? f a 3 racines : -1, 1 et 5.

(3) Déterminer les antécédents de 100 par f.

100 a deux antécédents par f :

- le premier est situé dans $]-\infty,-1]$ et est solution de l'équation :

$$100 = -x-1 \Leftrightarrow -x = 101 \Leftrightarrow x = -101$$

- le deuxième est situé dans $[5,+\infty[$ et est solution de l'équation :

$$\begin{aligned} &(x-5)^2 = 100 \\ &\Leftrightarrow x-5 = 10 \text{ ou } x-5 = -10 \\ &\Leftrightarrow x = 15 \text{ ou } x = -5 \text{ (à exclure)} \end{aligned}$$

Les deux antécédents sont donc : -101 et 15.

Question 3 16 (=4+6+6) points

Une entreprise fabrique et vend des poupées. Le coût total de la fabrication de x poupées (en €) est donné par $c(x) = 0,002x^2 + 2x + 4000$, pour $0 \leq x \leq 8'000$. Chaque poupée est vendue à 11 €.

(1) Déterminer : a) le bénéfice réalisé par l'entreprise lorsqu'elle fabrique et vend 800 poupées b) le bénéfice $b(x)$ réalisé par l'entreprise lorsqu'elle fabrique et vend x poupées.

a) $b(800) = 11 \cdot 800 - (0,002 \cdot 800^2 + 2 \cdot 800 + 4000)$
$= 1920$ €

b) $b(x) = 11 \cdot x - (0,002 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 4000)$
$= 11x - 0,002x^2 - 2x - 4000$
$= -0,002x^2 + 9x - 4000$

(2) a) L'entreprise gagne-t-elle de l'argent lorsqu'elle fabrique et vend 400 poupées ? 6'000 poupées ? b) Déterminer algébriquement la plage de production qui donne un bénéfice positif.

a) $b(400) = -720$
$b(6'000) = -22'000$
Donc l'entreprise perd de l'argent dans les 2 cas.

b) $b(x) > 0 \Leftrightarrow -0,002x^2 + 9x - 4000 > 0$

$\Delta = 81 - 4 \cdot 2 \cdot 4 = 81 - 32 = 49$

$x_1 = \frac{-9-7}{-2 \cdot 0,002} = \frac{-16}{-0,004} = 4'000$

$x_2 = \frac{-9+7}{-2 \cdot 0,002} = \frac{-2}{-0,004} = 500$

x	0		500		4000		8'000
$b(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc le bénéfice est $> 0 \Leftrightarrow x \in]500, 4000[$

(3) Etablir le tableau de variation de la fonction b sur $[0, 8'000]$ en justifiant votre réponse. Quel est le bénéfice maximum et le nombre de poupées fabriquées et vendues correspondant ?

b est du 2e degré, donc le graphe de b est une parabole. Cette parabole est tournée vers le bas puisque le coefficient de x^2 est < 0.
Le sommet de la parabole est $S\left(-\frac{9}{-0{,}004} ; -\frac{49}{-0{,}008}\right)$
$= S(2'250 ; 6125)$
Le tableau de variation de b est donc :

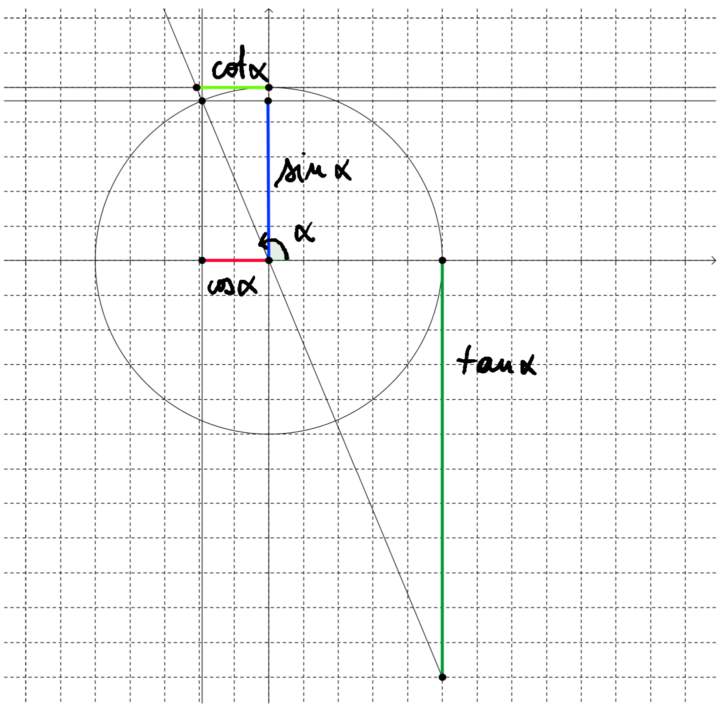
x	0		2'250		8'000
$b(x)$	-4000	$\nearrow$	6'125 M	$\searrow$	$-60'000$

Le bénéfice maximal de l'entreprise est donc de 6'125 €. Ce bénéfice est obtenu lorsque l'entreprise fabrique et vend 2'250 poupées.

Question 4 14 (=4+6+2+2) points

Soit α un angle du 2e quadrant tel que $\tan\alpha = -\frac{12}{5}$.

(1) Représenter sur le cercle trigonométrique ci-dessous α, $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, $\tan\alpha$ et $\cot\alpha$.



(2) Calculer les valeurs exactes de $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ et $\cot\alpha$.

• $\cot\alpha = -\frac{5}{12}$

• $\cos^2\alpha = \dfrac{1}{1+\tan^2\alpha}$

$\Leftrightarrow \cos^2\alpha = \dfrac{1}{1+\frac{144}{25}}$

$\Leftrightarrow \cos^2\alpha = \dfrac{1}{\frac{169}{25}} = \dfrac{25}{169}$

$\Leftrightarrow \cos\alpha = -\frac{5}{13}$ (car $\alpha \in 2^e$ q.)

$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$

$\Leftrightarrow \sin^2\alpha = 1 - \frac{25}{169}$

$\Leftrightarrow \sin^2\alpha = \frac{144}{169}$

$\Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{12}{13}$ (car $\alpha \in 2^e$ q. $\Rightarrow \sin\alpha > 0$)

(3) A l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée de α en radians.

$\alpha \equiv \pi - \sin^{-1}\left(\frac{12}{13}\right) \cong 1{,}96559$ rad

(ou bien :

$\alpha \equiv \tan^{-1}\left(-\frac{12}{5}\right) + \pi \equiv \cos^{-1}\left(-\frac{5}{13}\right) \equiv 1{,}96559$ rad)

(4) Déterminer toutes les mesures (valeurs approchées) de α en radians, comprises entre -10π et -6π.

$1{,}96559 - 8\pi \simeq -23{,}1672$

$1{,}96559 - 10\pi \simeq -29{,}4503$

G. Lorang