Nom : .... Prénom : ....

3C1 Corrigé du devoir de mathématiques III,1 4.05.2011

Durée : 90' ***Calculatrice autorisée***

Question 1 14 points

Construire ***en bleu*** le graphe de la fonction

$$f : x \mapsto -2\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$$

en partant du graphe de la fonction sinus. On demande de construire également les graphes des fonctions intermédiaires avec des couleurs différentes. ***La correction tiendra compte du soin et de la précision apporté à la figure !***

Réponse :

Fonctions intermédiaires : Opérations sur les graphes

$f_1 : x \mapsto \sin x$

retrancher $\frac{\pi}{3}$ aux abscisses

$f_2 : x \mapsto \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

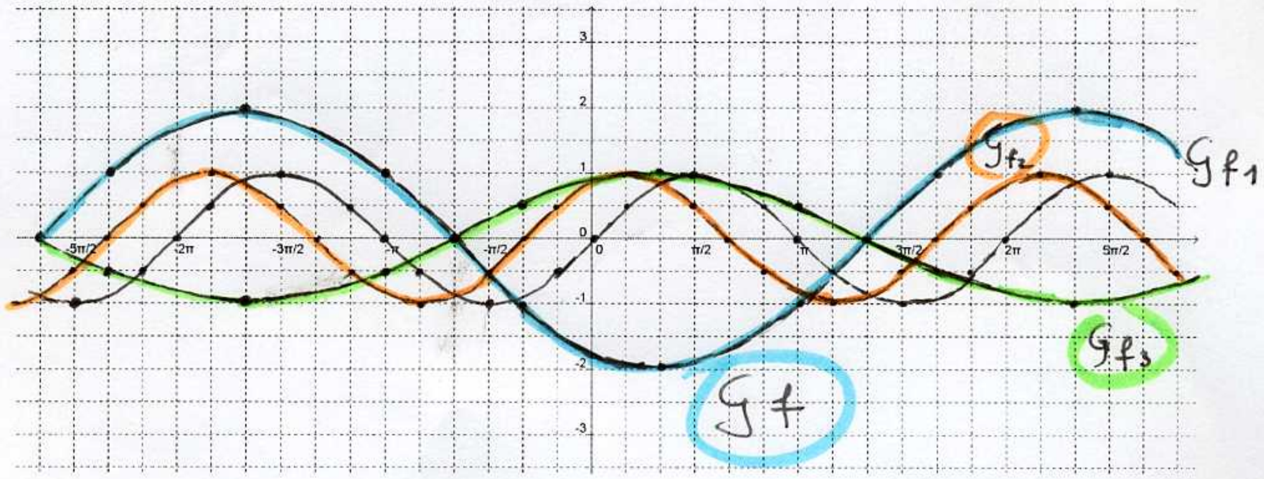
multiplier les abscisses par 2

$f_3 : x \mapsto \sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$

multiplier les ordonnées par -2

$f : x \mapsto -2\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$

Représentation graphique des différentes fonctions :



Question 2 16 (=10+6) points

a) Résoudre les équations trigonométriques suivantes dans $\mathbb{R}$ et indiquer l'ensemble de solutions. b) Déterminer toutes les solutions dans $[0, 2\pi]$ et représenter ces solutions avec précision sur le cercle trigonométrique.

(1)a) $2\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 3x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$ ou $3x + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{6} + k \cdot 2\pi$

$\Leftrightarrow 3x = -\frac{5\pi}{12} + k \cdot 2\pi$ ou $3x = \frac{11\pi}{12} + k \cdot 2\pi$

$\Leftrightarrow x = -\frac{5\pi}{36} + k \cdot \frac{2\pi}{3}$ ou $x = \frac{11\pi}{36} + k \cdot \frac{2\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$

$S = \left\{ -\frac{5\pi}{36} + k \cdot \frac{2\pi}{3}, \frac{11\pi}{36} + k \cdot \frac{2\pi}{3} \;/\; k \in \mathbb{Z} \right\}$

b) Solutions dans $[0, 2\pi]$:

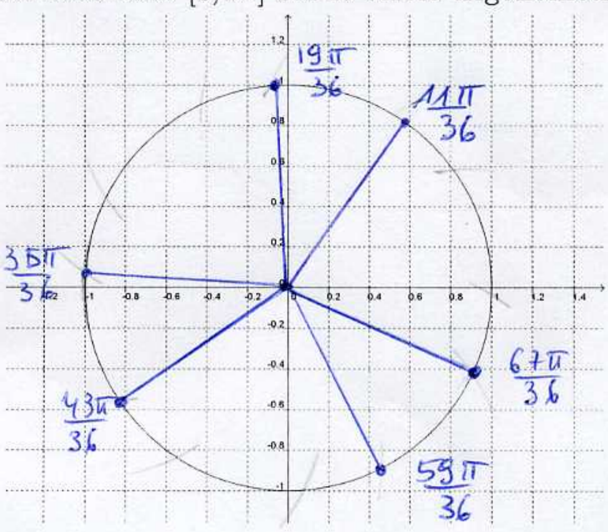
$\frac{19\pi}{36}$; $\frac{43\pi}{36}$; $\frac{67\pi}{36}$

$\frac{11\pi}{36}$; $\frac{35\pi}{36}$; $\frac{59\pi}{36}$

Représentation des solutions dans $[0, 2\pi]$ sur le cercle trigonométrique :

$\frac{19\pi}{36} = 95°$

$\frac{11\pi}{36} = 55°$



(2) $\tan\left(\dfrac{3x}{2}\right) = 2,5722$

a) $\tan\left(\frac{3x}{2}\right) = 2,5722$

$\Leftrightarrow \quad \frac{3x}{2} = 1,200 + k\cdot\pi \quad , k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \quad x = 0,80 + k\cdot\frac{2\pi}{3} \quad , k\in\mathbb{Z}$

$S = \left\{ 0,80 + k\cdot\frac{2\pi}{3} \ , \ k\in\mathbb{Z} \right\}$

(solutions approchées)

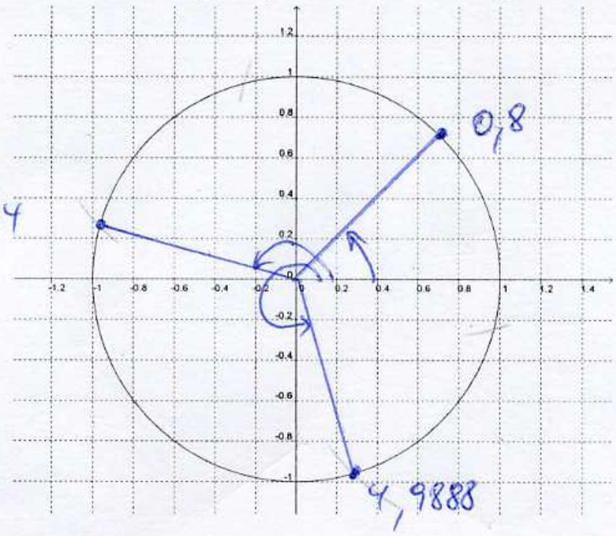
b) solution dans $[0, 2\pi]$

$0,8 \ ; \ 0,8 + \frac{2\pi}{3} \simeq 2,894 \ ;$

$0,8 + \frac{4\pi}{3} \simeq 4,9888$

Représentation des solutions dans $[0, 2\pi]$ sur le cercle trigonométrique :

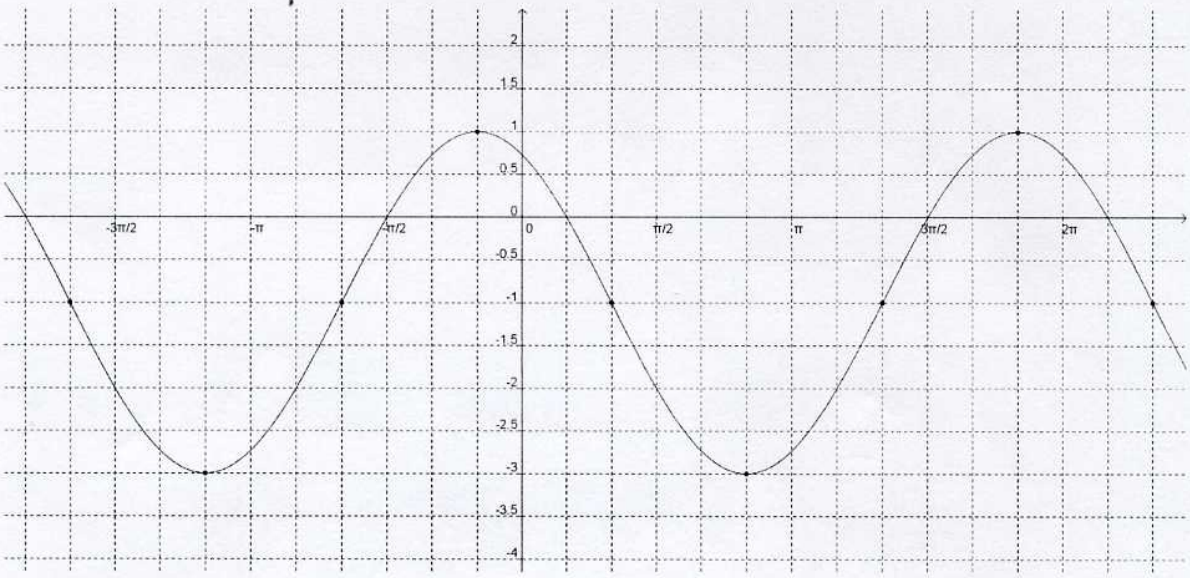
0,8 rad
$\simeq 45,84°$



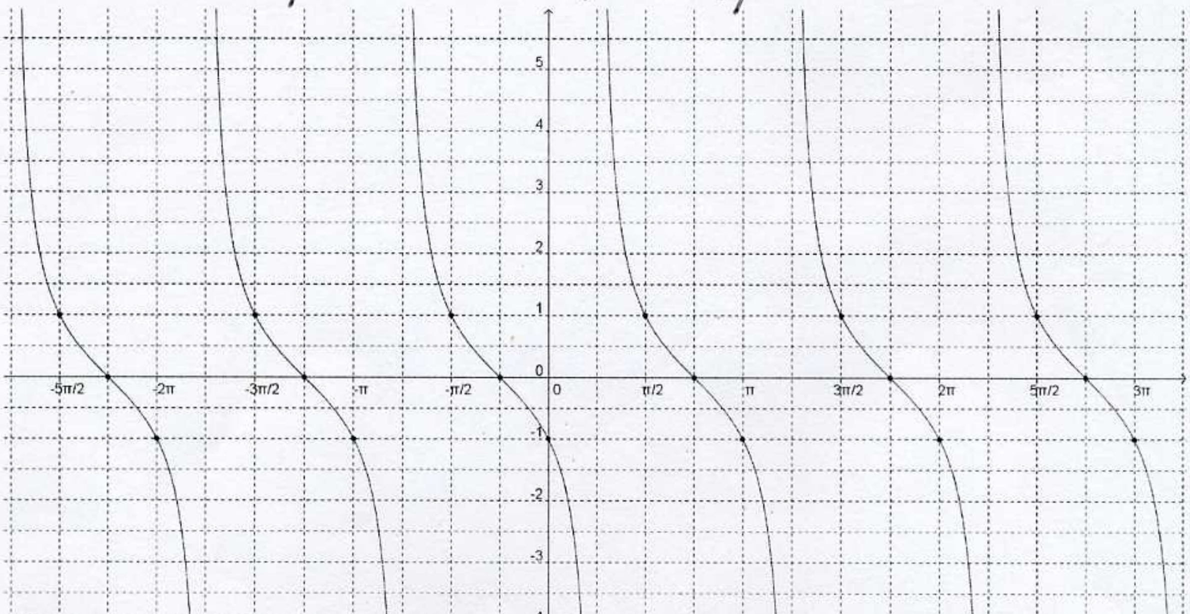
Question 3 — 6 (=3+3) points

Déterminer une équation cartésienne des courbes suivantes, sachant qu'elles ont été obtenues en manipulant le graphe d'une fonction trigonométrique :

(1) Equation : $y = 2 \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 1$



(2) Equation : $y = -\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$



Question 4 — 24 (=5+5+7+7) points

Démontrer les identités trigonométriques suivantes après avoir déterminé les conditions d'existence :

(1) $\dfrac{1}{\cos x} - \cos x = \sin x \cdot \tan x$

C.E : $\begin{cases} \cos x \neq 0 \iff x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \tan x \text{ existe} \iff x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$

$D = \mathbb{R} \setminus \{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \}$

$(\forall x \in D)$ $\dfrac{1}{\cos x} - \cos x = \dfrac{1}{\cos x} - \dfrac{\cos^2 x}{\cos x}$

$= \dfrac{1 - \cos^2 x}{\cos x}$

$= \dfrac{\sin^2 x}{\cos x}$ (rel. fond.)

$= \sin x \cdot \dfrac{\sin x}{\cos x}$

$= \sin x \cdot \tan x$

(2) $\dfrac{\cos y - 1}{\sin y} = \dfrac{-\sin y}{\cos y + 1}$

C.E : $\begin{cases} \sin y \neq 0 \iff y \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \cos y \neq -1 \iff y \neq \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$D = \mathbb{R} \setminus \{ k\pi, k \in \mathbb{Z} \}$

$(\forall y \in D)$ $\dfrac{\cos y - 1}{\sin y} = \dfrac{-\sin y}{\cos y + 1}$

$\iff (\cos y - 1)(\cos y + 1) = -\sin^2 y$

$\iff \cos^2 y - 1 = -\sin^2 y$

$\iff \cos^2 y + \sin^2 y = 1$ VRAI !

(rel. fond.)

(3) $\sin^6 a + \cos^6 a + 3\sin^2 a\cos^2 a = 1$ $\mathcal{D} = \mathbb{R}$

Rappel : $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Donc $(\sin^2 a + \cos^2 a)^3 = \sin^6 a + 3\sin^4 a\cos^2 a$
$+ 3\sin^2 a\cos^4 a + \cos^6 a$

$\Leftrightarrow 1^3 = \sin^6 a + 3\sin^2 a\cos^2 a\underbrace{(\sin^2 a + \cos^2 a)}_{1 \text{ (rel. fond.)}}$
$+ \cos^6 a$

$\Leftrightarrow 1 = \sin^6 a + 3\sin^2 a\cos^2 a + \cos^6 a$

Ceci est exactement la relation à démontrer !

(4) $\tan^2 x + \cot^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x\cos^2 x} - 2$

C.E : $\tan x$ existe $\Leftrightarrow \cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
$\cot x$ existe $\Leftrightarrow \sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ k \cdot \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

$(\forall x \in \mathcal{D})$

$\tan^2 x + \cot^2 x + 2$

$= \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \dfrac{\cos^2 x}{\sin^2} + 2$

$= \dfrac{\sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}$

$= \dfrac{(\sin^2 x + \cos^2 x)^2}{\sin^2 x\cos^2 x} = \dfrac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}$

Donc : $\tan^2 x + \cot^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x\cos^2 x} - 2$

G. Lorang