Nom : .... Prénom : ....

3C1 Corrigé du devoir III,2 8.06.2011

Question 1

17 (=3+4+4+6) points

Dans un repère othonormé on donne les points $A\left(-1,3\right)$, $B\left(4,-2\right)$ et $C\left(5,1\right)$.

(1) Est-ce que $AB = AC$?

$AB = \sqrt{(4+1)^2+(-2-3)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

$AC = \sqrt{(5+1)^2+(1-3)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

Donc $AB \neq AC$

(2) Montrer par un calcul que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. Qu'est-ce qu'on en déduit au sujet des points A, B et C ?

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\-5\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix}$

$\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix}5 & 6\\-5 & -2\end{vmatrix} = -10+30 = 20 \neq 0$

Donc $\overrightarrow{AB} \not\parallel \overrightarrow{AC}$ et A, B et C ne sont pas alignés

(3) Montrer que le triangle ABC est rectangle en C.

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC} = 6\cdot1+(-2)\cdot3 = 6-6 = 0$

Donc $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BC}$ c.-à-d. ΔABC est rectangle en C.

(4) Déterminer les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{AM}+2\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}=\vec{0}$

Soit $M(x,y)$.

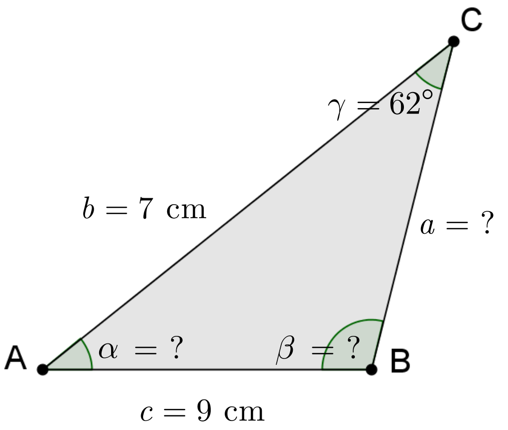
$\overrightarrow{AM}+2\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}x+1\\y-3\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}x-4\\y+2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x-5\\y-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x+1+2x-8+x-5=0\\y-3+2y+4+y-1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4x-12=0\\4y=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x=3\\y=0\end{cases}$ Donc : $M(3,0)$

Question 2 | 11 points



Résoudre le triangle ci-contre ! (La figure n'est pas exacte.)
On demande de donner les angles inconnus en degrés-minutes-secondes !

Relation aux sinus :

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} \iff \frac{7}{\sin\beta} = \frac{9}{\sin 62°}$$

$$\iff 9\sin\beta = 7\sin 62°$$

$$\iff \sin\beta = \frac{7\cdot\sin 62°}{9}$$

$$\iff \beta = 43{,}3723\ldots° \text{ ou } \beta = 136{,}6276\ldots°$$

Or, la 2e solution est à exclure car comme $\gamma = 62°$, la somme des angles du Δ ABC serait $> 180°$.

Donc $\beta = 43{,}3723\ldots° \simeq 43°\,22'\,20{,}52''$

Maintenant : $\alpha = 180 - \beta - \gamma \simeq 74°\,37'\,39{,}48''$

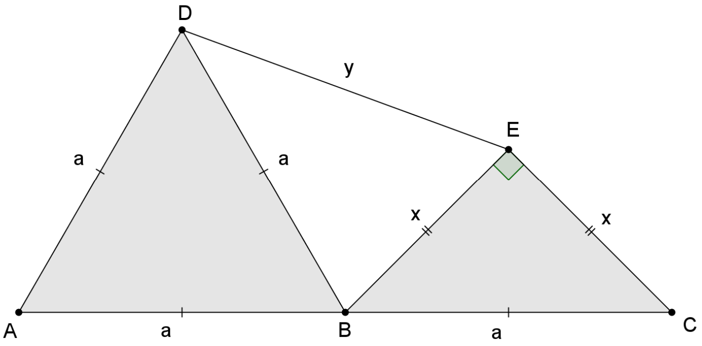
Pour calculer a, on peut encore une fois utiliser la relation aux sinus :

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

$$\iff a = \frac{c\cdot\sin\alpha}{\sin\gamma} \simeq 9{,}828 \text{ cm}$$

Question 3 16 (=2+3+5+6) points

Rappel : Votre calculatrice sait que $\cos 75° = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.



Sur la figure ci-dessus, le triangle ABD est équilatéral de longueur de côté a, où a est un nombre réel strictement positif. Le triangle BCE est rectangle et isocèle en E avec $BC = a$. Les points A, B et C sont alignés.

(1) Déterminer l'angle $\widehat{DBE}$ en degrés.

$\widehat{DBE} = 180° - 60° - 45° = 75°$

(2) Calculer x ($= EB = EC$) en fonction de a (pas de valeur approchée !).

Théorème de Pythagore dans le Δ EBC :

$x^2 + x^2 = a^2 \Leftrightarrow 2x^2 = a^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow x = \frac{a}{\sqrt{2}}$

Ou bien : $\cos 45° = \frac{x}{a} \Leftrightarrow x = a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \left(= \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$

(3) Calculer y ($= DE$) en fonction de a. (On trouvera $y = a\sqrt{2 - \frac{\sqrt{3}}{2}}$).

Théorème d'Al-Kashi :

$y^2 = a^2 + x^2 - 2ax\cos 75°$

$\Leftrightarrow y^2 = a^2 + \frac{a^2}{2} - \cancel{2}a \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\cancel{4}\,2}$

$\Leftrightarrow y^2 = \frac{3a^2}{2} - \frac{a^2 \cdot \cancel{\sqrt{2}} \cdot (\sqrt{3}-1)}{2\cancel{\sqrt{2}}}$

$\Leftrightarrow y^2 = \frac{3a^2}{2} - \frac{\sqrt{3}a^2}{2} + \frac{a^2}{2}$

$\Leftrightarrow y^2 = 2a^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}a^2 = a^2\left(2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\Leftrightarrow y = a \cdot \sqrt{2 - \frac{\sqrt{3}}{2}}$

(4) Déterminer les angles $\delta = \widehat{BDE}$ et $\varepsilon = \widehat{DEB}$ en degrés - minutes - secondes.

Relation aux sinus :

$$\frac{x}{\sin\delta} = \frac{y}{\sin 75^\circ}$$

$$\Leftrightarrow \quad x \cdot \sin 75^\circ = y \cdot \sin\delta$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin\delta = \frac{x \cdot \sin 75^\circ}{y} = \frac{\frac{\cancel{\alpha}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\cancel{\alpha}\sqrt{2-\frac{\sqrt{3}}{2}}} = \frac{\sqrt{3}+1}{4 \cdot \sqrt{2-\frac{\sqrt{3}}{2}}}$$

$$\simeq 0{,}6413972855\ldots$$

Donc : $\delta \simeq 39{,}89609\ldots \simeq 39^\circ\, 53'\, 45{,}93''$ $(=\delta_1)$

ou $\delta = 180^\circ - \delta_1 \simeq 140{,}1^\circ$, à exclure (somme des angles $> 180^\circ$)

Finalement : $\varepsilon = 180^\circ - 75^\circ - \delta \simeq 65^\circ\, 6'\, 14{,}07''$

Question 4 — 8 points

Calculer l'aire ***exacte*** d'un triangle dont les trois côtés mesurent respectivement 13, 14 et 15 cm.

Réponse :

Posons $a = 13$ cm, $b = 14$ cm et $c = 15$ cm. Appliquons la relation au cosinus :

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{14^2 + 15^2 - 13^2}{2 \cdot 14 \cdot 15} = \frac{252}{2 \cdot 14 \cdot 15} = \frac{3}{5}$$

On déduit de la relation fondamentale de la trigonométrie que :

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \tfrac{9}{25}} = \sqrt{\tfrac{16}{25}} = \tfrac{4}{5}$$

Par conséquent, l'aire du triangle vaut :

$$S = \tfrac{1}{2} bc \sin\alpha = \tfrac{1}{2} \cdot 14 \cdot 15 \cdot \tfrac{4}{5} = 28 \cdot 3 = 84 \text{ cm}^2$$

Question 5 8 points

Démontrer la relation d'Al-Kashi (relation aux cosinus) dans le cas d'un triangle acutangle (c.-à-d. ayant 3 angles aigus).

Voir manuel !

G. Lorang