Question 1

(1) Voir cours.

(2) a) Le discriminant nous renseigne sur le nombre de racines :

$$\begin{aligned}\Delta &= 2 - 4\sqrt{5}\left(-1-\sqrt{5}\right)\\ &= 2 + 4\sqrt{5} + 20\\ &= 22 > 0\end{aligned}$$

donc il y a 2 racines distinctes.

b) Le produit des racines est :

$$\frac{-1-\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = -\frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5}} < 0\,.$$

Donc les racines sont de signes contraires. Marie a donc raison.

(3) Les racines du trinôme sont -2008 et 2009, donc leur somme est 1.

Question 2

Soit a et b les deux nombres cherchés. On a le système :

$$\begin{cases} a-b=15 \\ a\cdot b=-36\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+(-b)=15 \\ a\cdot(-b)=36\end{cases}$$

Les nombres a et $-b$, s'ils existent, sont les solutions de l'équation du 2^{e} degré : $x^2-15x+36=0$, dont les solutions sont 3 et 12. Donc :

1re solution : $a=3$ et $-b=12 \Leftrightarrow a=3$ et $b=-12$

2^{e} solution : $a=12$ et $-b=3 \Leftrightarrow a=12$ et $b=-3$

Question 3

Résoudre les équations suivantes :

(1) $x^2-\left(2\sqrt{3}-1\right)x+1-\sqrt{3}=0$ (éq. du 2^{e} degré)

$$\begin{aligned}\Delta &= \left(2\sqrt{3}-1\right)^2-4\left(1-\sqrt{3}\right)\\ &= 4\cdot 3-4\sqrt{3}+1-4+4\sqrt{3}\\ &= 9\end{aligned}$$

Donc 2 racines : $\dfrac{2\sqrt{3}-1-3}{2}=\sqrt{3}-2$ et $\dfrac{2\sqrt{3}-1+3}{2}=\sqrt{3}+1\,.$

$$S=\left\{\sqrt{3}-2,\sqrt{3}+1\right\}$$

(2) $x^4-2x^2-3=0$ (éq. bicarrée)

On pose : $y=x^2$ et on obtient l'équation du 2^{e} degré associée :

$y^2 - 2y - 3 = 0$, dont les solutions sont -1 et 3.

On revient à x :

$$x^2 = -1 \text{ (impossible) ou } x^2 = 3$$
$$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

Donc $S = \left\{\pm\sqrt{3}\right\}$.

(3) $4x^3 - 24x^2 + 21x + 49 = 0$ (éq. du 3^{e} degré)

On cherche une racine entière, qui est nécessairement un diviseur de 49.

On trouve que -1 est une racine car :

$$-4 - 24 - 21 + 49 = 0\,.$$

Donc le polynôme $p(x)$ dans le membre de gauche est divisible par $(x+1)$. Le schéma de Horner fournit la factorisation :

$$p(x) = (x+1)\left(4x^2 - 28x + 49\right) = (x+1)(2x-7)^2$$

Donc : $p(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = \frac{7}{2}$.

$$S = \left\{-1, \tfrac{7}{2}\right\}.$$

(4) $x^8 + 32x^3 = 0 \Leftrightarrow x^3\left(x^5 + 32\right) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -2$

$$S = \{0, -2\}$$

Question 4

Soit x le nombre d'élèves de la classe.

Si tout le monde pouvait payer, chacun devrait payer : $\dfrac{576}{x}$ €.

Or deux élèves ne payent pas, donc chacun paye : $\dfrac{576}{x-2}$ €.

D'après l'énoncé :

$$\begin{aligned}
&\frac{576}{x-2} = \frac{576}{x} + 1{,}20 \\
&\Leftrightarrow 576x = 576(x-2) + 1{,}2x(x-2) \\
&\Leftrightarrow -2 \cdot 576 + 1{,}2x^2 - 2{,}4x = 0 \\
&\Leftrightarrow 1{,}2x^2 - 2{,}4x - 1152 = 0 \,/\cdot 10 \\
&\Leftrightarrow 12x^2 - 24x - 11520 = 0 \,/\, 12 \\
&\Leftrightarrow x^2 - 2x - 960 = 0
\end{aligned}$$

On a : $\Delta = 4 + 4 \cdot 960 = 62^2$.

Les solutions de l'équation sont donc : -30 et 32.

Seule la solution positive convient : il y a donc 32 élèves dans cette classe.

Question 5

Soit v la vitesse moyenne du train à l'aller.

Temps pour l'aller : $\dfrac{705}{v}$

Temps pour le retour : $\dfrac{705}{v-50}$

Temps total :

$$\begin{aligned}
&11{,}75 = \frac{705}{v} + \frac{705}{v-50}\\
&\Leftrightarrow \frac{47}{4} = 705\left(\frac{1}{v} + \frac{1}{v-50}\right) / : 47\\
&\Leftrightarrow \frac{1}{4} = \frac{15(2v-50)}{v(v-50)}\\
&\Leftrightarrow v(v-50) = 60(2v-50)\\
&\Leftrightarrow v^2 - 50v = 120v - 3000\\
&\Leftrightarrow v^2 - 170v + 3000 = 0
\end{aligned}$$

On trouve : $v_1 = 20$ km/h et $v_2 = 150$ km/h

La vitesse v_1 est à écarter, car le train doit faire au moins 50 km/h, sinon la vitesse au retour serait négative. La vitesse moyenne à l'aller est donc 150 km/h et la vitesse moyenne au retour est 100 km/h. La vitesse moyenne sur l'aller-retour est $1410/11{,}75 = 120$ km/h.

Le temps pour l'aller est : $\dfrac{705}{150} = 4{,}7$ h $=$ 4 h 42 min.

Le temps pour le retour est : 7,05 h = 7 h 3 min.

G. Lorang